Matemáticas III
Tema 3: Sistemas diferenciales lineales

José Luis Bravo Trinidad

16 de noviembre de 2026
Versión provisional
Puede contener errores

Contenidos

3.1. Sistemas de primer orden y ecuaciones de orden n:

- Soluciones y problemas de valor inicial.
- Existencia y unicidad.
- Relación entre sistemas y ecuaciones de orden n.

3.2. Sistemas diferenciales lineales:

- Estructura de las soluciones.
- Sistemas con coeficientes constantes y autovalores.
- Sistemas no homogéneos y coeficientes indeterminados.

3.3. Resolución numérica:

- Métodos de Euler y Heun.
- Método de Runge–Kutta de orden cuatro.

3.1

Sistemas diferenciales y ecuaciones de orden n

Estudiaremos los sistemas de primer orden, sus problemas de valor inicial y su relación con las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Sistemas diferenciales n-dimensionales

Definición

Un **sistema diferencial de primer orden de dimensión** n *es un sistema de ecuaciones de la forma*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots\ldots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

donde $f_1, \ldots f_n \colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *son funciones conocidas.*

Sistemas diferenciales n-dimensionales

Un sistema diferencial de n ecuaciones con n incógnitas puede escribirse como

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Ejemplo

Por ejemplo, si $x_1 = x$, $x_2 = y$, $f_1(t, x_1, x_2) = x_1 + x_2$ y $f_2(t, x_1, x_2) = x_1 - x_2$, tenemos el sistema diferencial 2-dimensional

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Sistemas diferenciales n-dimensionales

Definición

Una **solución** *es una función* $t \in I \to (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, *siendo* I *un intervalo de* $\mathbb{R}$, *tal que para*

- $x_1, \ldots, x_n$ *son derivables en* t,
- $(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *están en el dominio de* $f_1, \ldots, f_n$,
- *cumplen el sistema diferencial, es decir,*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots\ldots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

Ejemplos

Ejemplo

Sea el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = 2x. \end{cases}$$

Una solución es la función $t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) = (t, t^2)$.

Se dice que $\{x(t) = t, y(t) = t^2\}$ *es una solución.*

El problema de valor inicial

Definición

El **problema de valor inicial** *consiste en determinar una solución de*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots\ldots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

que verifique

$$(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = (x_{01}, \ldots, x_{0n}),$$

donde $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ *son valores previamente fijados.*

Ejemplos

Ejemplo

El problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x^2 \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 3/2$$

tiene la solución $t \in \mathbb{R} \to (x(t), y(t)) = (e^t, e^{2t}/2 + 1)$.

Se dice que $\{x(t) = e^t, y(t) = e^{2t}/2 + 1\}$ *es una solución.*

Existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial

Teorema

Supongamos que

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} : D \to \mathbb{K}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

son funciones continuas en el abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *y la condición inicial* $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$.

Entonces existe una solución del problema de valor inicial en un intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ *y esa solución es única.*

Sistemas autónomos y puntos de equilibrio

Definición

Un sistema diferencial es **autónomo** *si puede escribirse como*

$$x' = F(x),$$

es decir, si el segundo miembro no depende explícitamente de t.

Definición

Un **punto de equilibrio** *es un estado* x_* *tal que* $F(x_*) = 0$. *En ese caso, la función constante* $x(t) = x_*$ *es una solución.*

Ejemplo

Para $x' = x + y$, $y' = x - y$, *el punto* $(0, 0)$ *es de equilibrio, pues ambos segundos miembros se anulan en* $(0, 0)$.

Órbita de una solución

Definición

Sea $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ una solución de un sistema diferencial. Su **órbita** *(o trayectoria en el espacio de fases) es el conjunto de estados que recorre:*

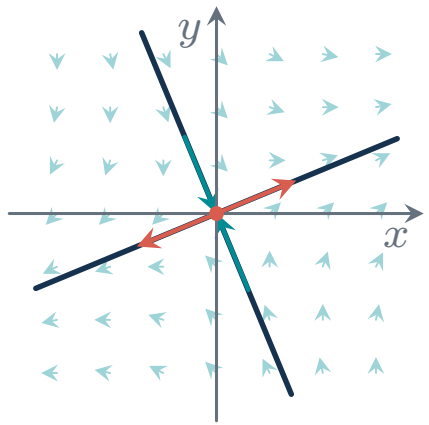
$$\mathrm{orb}(x) = \{x(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

La solución incluye la parametrización temporal; la órbita describe la curva geométrica recorrida. Si el sistema depende explícitamente de t, la trayectoria completa se representa en el espacio ampliado por

$$\{(t, x(t)) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Campo de direcciones

Para un sistema autónomo plano $x' = F(x)$, el campo de direcciones asigna a cada punto x el vector $F(x)$, que indica la dirección y el sentido instantáneos de la solución.



Ejemplo

Representa el campo de direcciones de

$$x' = x + y, \quad y' = x - y.$$

Ecuaciones diferenciales de orden n

Definición

Una **ecuación diferencial de orden** n *es una expresión de la forma*

$$x^{(n)}(t) = f_n(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)),$$

donde f_n *es una función conocida.*

Definición

Una **solución** *de la ecuación diferencial de orden* n *es una función* $x\colon I \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \in I$*,*

$$x^{(n)}(t) = f_n(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)).$$

Ecuaciones diferenciales de orden n

Definición

El problema de valor inicial para la ecuación diferencial de orden n consiste en determinar la existencia y, en su caso, la unicidad de soluciones de

$$x^{(n)} = f_n(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}),$$

tales que satisfacen la condición inicial

$$x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02},\ \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n},$$

donde $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n})$ están fijados.

Relación entre sistemas y ecuaciones

- A la ecuación diferencial de orden n

$$x^{(n)}(t) = f_n\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

le corresponde el sistema diferencial de primer orden

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \cdots \cdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

- En efecto, se verifica que $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial si y solo si

$$\{x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), \ldots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t)\}$$

es solución del sistema diferencial.

Relación entre sistemas y ecuaciones

- Las soluciones del problema de valor inicial

$$x^{(n)} = f_n(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}),$$
$$x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02}, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}$$

se pueden obtener a partir de las del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \ldots\ \ldots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$
$$x_1(t_0) = x_{01},\ x_2(t_0) = x_{02}, \ldots,\ x_n(t_0) = x_{0n}$$

Ejemplo

Ejemplo

Transformar el problema de valor inicial

$$x'''(t) + (x'(t))^2 + 3x(t) = e^t$$
$$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 0$$

en un problema de valor inicial para un sistema diferencial.

3.2

Sistemas diferenciales lineales

Analizaremos la estructura de las soluciones, los sistemas lineales con coeficientes constantes y los métodos para tratar términos no homogéneos.

Sistemas lineales

Sistema diferencial lineal

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{K}$, con I un intervalo de $\mathbb{R}$.

Caso homogéneo

Si $b_i(t) \equiv 0$ para todo i, el sistema es homogéneo.

Sistemas lineales

Un sistema lineal se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

De manera resumida $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial

En el caso de un sistema diferencial lineal

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + \cdots + a_{in}(t)x_n + b_i(t),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n) = a_{ij}(t).$$

Para que se cumplan las hipótesis del teorema de existencia y unicidad es suficiente que las funciones $a_{ij}(t), b_i(t)$ sean continuas en su intervalo de definición.

En todo lo que sigue se supone la continuidad de las funciones $a_{ij}(t), b_i(t)$.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

Teorema

Si y_1, y_2 son soluciones del sistema **lineal homogéneo** *y $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, entonces $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ también es solución.*

Dimensión del espacio de soluciones

Cada dato inicial $y(t_0) \in \mathbb{K}^n$ determina una única solución. Por tanto, el espacio de soluciones tiene dimensión n.

Criterio del wronskiano

Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones y sea $W(t) = \det\big[y_1(t) \ \cdots \ y_n(t)\big]$. Si $W(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$, entonces $y_1, \ldots, y_n$ forman una base del espacio de soluciones.

Ejemplo: wronskiano y solución de un PVI

Considera el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \end{cases}$$

y las funciones vectoriales

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

1. $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son soluciones.
2. Son linealmente independientes porque su wronskiano es distinto de cero.
3. Calculemos una solución del PVI $x(0) = 1, y(0) = 0$. ¿Qué relación tiene la matriz del sistema de ecuaciones que aparece con el Wronskiano?

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Estudiaremos la resolución de sistemas homogéneos con coeficientes constantes mediante autovalores y autovectores.

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Supongamos que los coeficientes $a_{ij}(t)$ son constantes, $a_{ij}(t) = a_{ij}$, y que $b_i(t) \equiv 0$. Si $A = (a_{ij})$, el sistema se escribe

Sistema homogéneo con coeficientes constantes

$$x' = Ax.$$

El teorema de existencia y unicidad garantiza que cada condición inicial determina una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.

Caso unidimensional

Para $x' = ax$, las soluciones son $x(t) = ce^{at}$, con $c \in \mathbb{K}$.

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Guiados por el caso unidimensional, buscamos soluciones exponenciales de la forma

Solución candidata

$$x(t) = e^{\lambda t} p, \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \quad p \in \mathbb{K}^n.$$

Al sustituir en $x' = Ax$, la condición para que sea solución no trivial es

$$Ap = \lambda p, \qquad p \neq 0.$$

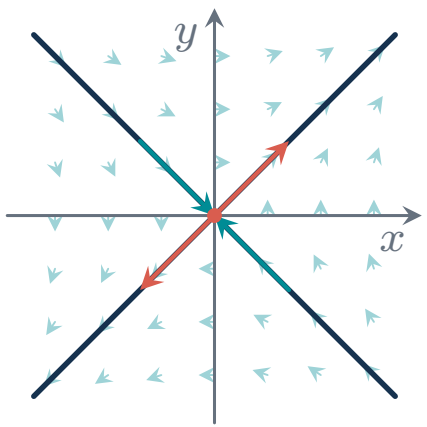
Por tanto, λ debe ser un autovalor de A y p un autovector asociado.

Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales distintos.

Ejemplo (Punto de silla)

Obtener las soluciones de

$$x' = y, \quad y' = x.$$

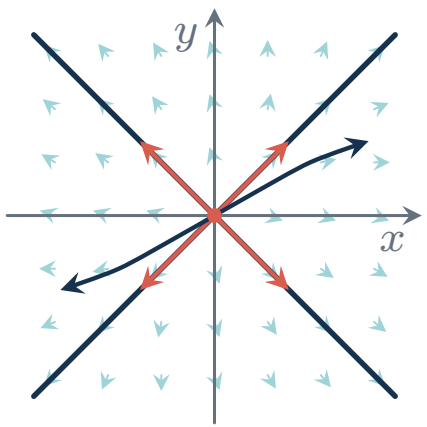


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales distintos.

Ejemplo (Nodo propio (inestable))

Obtener las soluciones de

$$x' = 3x - y, \quad y' = 3y - x.$$

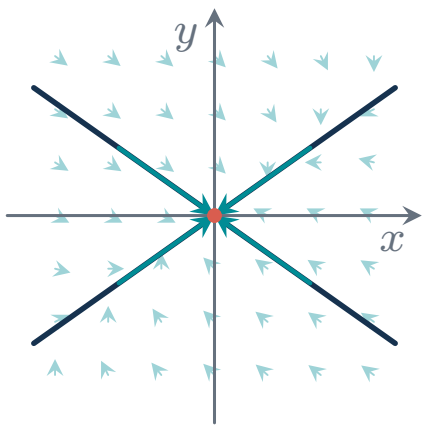


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales distintos.

Ejemplo (Nodo propio (estable))

Obtener las soluciones de

$$x' = -2x + 2y, \quad y' = x - 2y.$$

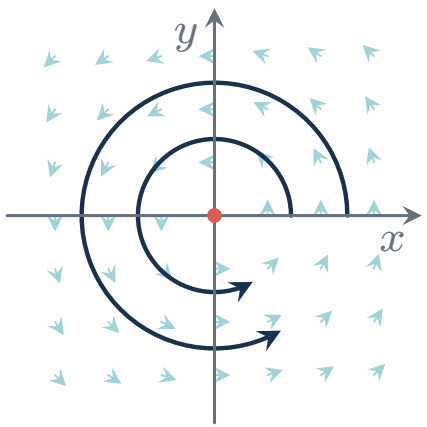


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Autovalores complejos conjugados.

Ejemplo (Centro)

Obtener las soluciones de

$$x' = -y, \quad y' = x.$$

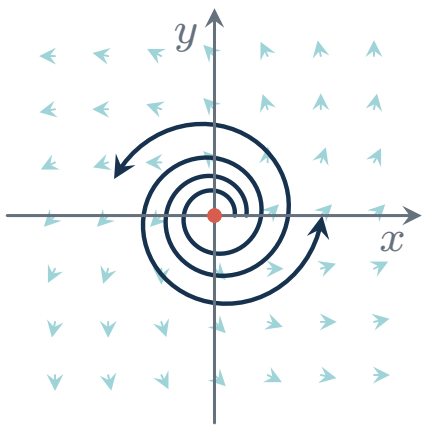


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Autovalores complejos conjugados.

Ejemplo (Foco (inestable))

Obtener las soluciones de

$$x' = x - y, \quad y' = x + y.$$

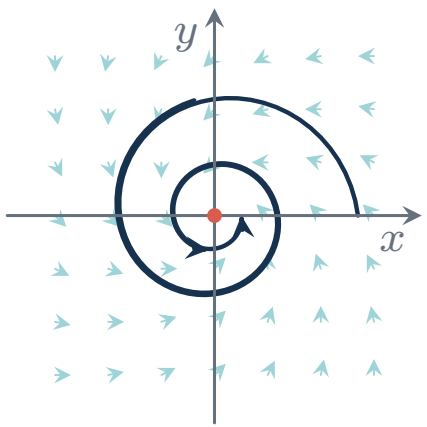


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Autovalores complejos conjugados.

Ejemplo (Foco (estable))

Obtener las soluciones de

$$x' = -x - y, \quad y' = x - y.$$

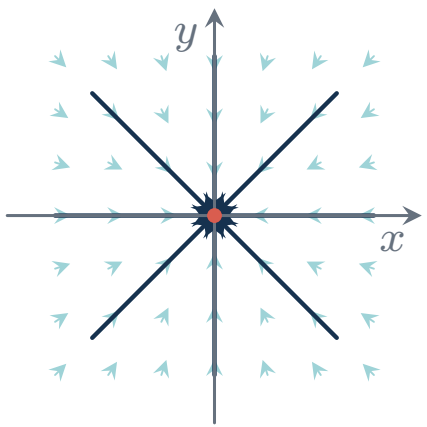


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales iguales.

Ejemplo (Nodo propio (estable))

Obtener las soluciones de

$$x' = -x, \quad y' = -y.$$



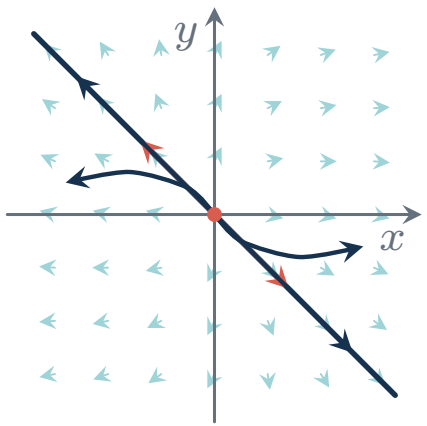
Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales iguales.

Supongamos ahora que no hay una base de autovectores.

Ejemplo (Nodo impropio)

Obtener las soluciones de

$$x' = 4x + y, \quad y' = -x + 2y.$$



Sistemas lineales no homogéneos

Estudiaremos cómo obtener soluciones particulares mediante el método de los coeficientes indeterminados.

Coeficientes indeterminados

Vamos a intentar resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = Ax + f(t),$$

donde A es una matriz y f es una función dada.

- Si $u_p(t)$ es una solución de la ecuación, entonces todas las soluciones son de la forma

  $$u(t) = u_p(t) + u_h(t),$$

  donde u_h es solución de $x' = Ax$.
- Si $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ y u_1, u_2 son soluciones de $x' = Ax + f_1(t)$, $x' = Ax + f_2(t)$, respectivametne, entonces

  $$u_p(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

  es solución de $x' = Ax + f$.

Coeficientes indeterminados

Por la discusión anterior, basta encontrar una solución particular u_p.

1. Si $f(t) = at^n$, buscaremos soluciones que sean polinomios de grado n o menor.
2. Si $f(t) = ae^{\lambda t}$ y λ no es autovalor de A, buscaremos soluciones que sean de de la forma

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

3. Si $f(t) = ae^{\lambda t}$ y λ es autovalor (simple) de A, buscaremos soluciones que sean de de la forma

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + x_1 t e^{\lambda t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda t} + y_1 t e^{\lambda t}.$$

Coeficientes indeterminados

Ejemplo

Encontrar una solución general del sistema lineal no homogéneo

$$y' = Ay + g = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

Encontrar una solución general de

$$y' = Ay + g = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

3.3

Resolución numérica de sistemas diferenciales

Construiremos aproximaciones de las soluciones de un problema de valor inicial mediante los métodos de Euler, Heun y Runge–Kutta.

El método de Euler

Consideremos el problema de valor inicial vectorial

$$u' = F(t, u), \qquad u(t_0) = u_0,$$

y una malla $t_n = t_0 + nh$, donde $h > 0$ es el paso. Denotamos por u_n la aproximación de $u(t_n)$.

Fórmula de Euler explícito

$$u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n).$$

En cada paso, se aproxima la solución por la recta tangente en (t_n, u_n). El método tiene orden global uno: su error es, en general, $O(h)$.

El método de Heun

Heun mejora Euler promediando la pendiente al comienzo del paso y una estimación de la pendiente al final.

Predictor y corrector

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_n, u_n), \\ \widetilde{u}_{n+1} &= u_n + hk_1, \\ k_2 &= F(t_n + h, \widetilde{u}_{n+1}), \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Primero se predice con Euler y después se corrige usando la media de las dos pendientes. Heun tiene orden global dos: su error es, en general, $O(h^2)$.

Runge–Kutta clásico de orden cuatro

El método RK4 combina cuatro evaluaciones de F para obtener una aproximación de orden global cuatro.

Las cuatro pendientes

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F(t_n, u_n),\\
k_2 &= F\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 &= F\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2\right),\\
k_4 &= F(t_n + h, u_n + hk_3),\\
u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}
$$

Su error global es, en general, $O(h^4)$. Las fórmulas se aplican también a sistemas: las pendientes k_i son vectores.

Comparación en un paso

Aplicamos los tres métodos a $u' = u$, $u(0) = 1$, con paso $h = 0{,}1$. La solución exacta en $t = 0{,}1$ es $e^{0{,}1}$.

Método	Aproximación de $u(0{,}1)$
Euler	$1{,}1$
Heun	$1{,}105$
Runge–Kutta (RK4)	$1{,}105170833$
Valor exacto	$e^{0{,}1} \approx 1{,}105170186$

Con este paso, RK4 da la aproximación más precisa de las tres.