Matemáticas III
Tema 4: Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales

J.L. Bravo

2 de noviembre de 2026
Versión provisional
Puede contener errores

Contenidos

- 4.1 Series de Fourier
- 4.2 Problemas de contorno
- 4.3 Ecuación del calor
- 4.4 Ecuación de ondas
- 4.5 Ecuación de Laplace

4.1
Introducción a las series de Fourier

Representación de funciones periódicas mediante series trigonométricas.

Coeficientes de Fourier

Dada una función $f(x)$ definida en $-L \leq x \leq L$, buscamos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad -L \leq x \leq L.$$

Coeficientes de Fourier

Sea f una función integrable en $[-L, L]$. Se denominan **coeficientes de Fourier** de f a

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Se denomina **serie de Fourier** de f a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Integrales de funciones trigonométricas

1. Para todo número natural n,

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = 0.$$

2. Si $n \neq m$, entonces

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = 0.$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = 0.$$

3. Si $n \neq 0$, entonces

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = L.$$

Convergencia

Teorema

Si f de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de f converge a f salvo en los puntos en los que f es discontinua.
Si $f(x)$ es continua y $f'(x)$ es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de f converge a f.

Ejemplo

Calcula la serie de Fourier de $f(x) = \sin(x)$, $x, \in [-\pi, \pi]$.

Ejemplo

Calcula la serie de Fourier de $f(x) = \cos^2(x)$, $x, \in [-\pi, \pi]$.

Convergencia

Ejemplo

Dada

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Calcula la serie truncada con $N = 2$ términos.

Ejemplo

Sea la función

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Calcula la serie de Fourier truncada con $N = 3$ términos:

$$S_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Convergencia

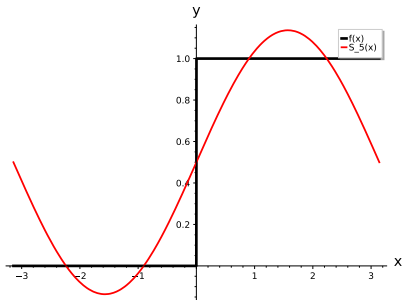
Ejemplo

Dada

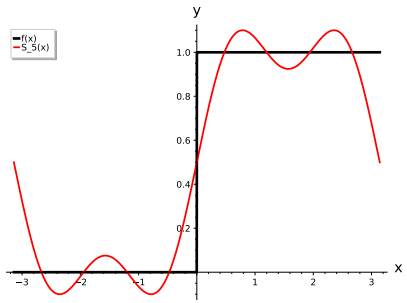
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Calcula la serie truncada con $N = 2$ términos.

$N = 2$



$N = 3$



Forma armónica

En ocasiones el término general del sumatorio se escribe de la siguiente forma:

$$a_n \cos(nw_0 x) + b_n \sin(nw_0 x) = c_n \cos(nw_0 x + \delta_n),$$

donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Esta manera de escribir la seriede Fourier se denomina **forma armónica**. El término $\cos(nw_0 x + \delta_n)$ es la n-ésima armónica de f, c_n es la n-ésima amplitud armónica y δ_n el n-ésimo ángulo de fase de f.
Se define el **espectro de amplitud** de una función periódica como los puntos $(nw_0, c_n/2)$.

4.2
Problemas de contorno

Ecuaciones diferenciales con condiciones prescritas en los extremos del intervalo.

Problemas de contorno

Al resolver ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables surge el problema de encontrar soluciones no triviales $x(t)$ de

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

- En el problema de valor inicial se buscan soluciones $x(t)$ tales que en un punto $t_0 \in [0, l]$ se conocen $x(t_0)$ y $x'(t_0)$.
- En un problema de contorno se buscan soluciones que cumplen ciertas ecuaciones en los extremos del intervalo $[0, l]$. Por esto se llama problema de contorno o de valores frontera.

Problemas de contorno

A continuación se resuelven algunos casos sencillos, pero importantes.
Primer problema:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$x(0) = x(l) = 0.$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes se llega a que hay soluciones no triviales solo si

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Además para cada n la solución es un múltiplo de

$$x_n(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right).$$

Problemas de contorno

Segundo problema:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$x'(0) = x'(l) = 0.$$

Hay soluciones no triviales solo si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Además para cada n la solución es un múltiplo de

$$x_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right).$$

Problemas de contorno

Tercer problema:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Problemas de contorno

Estos tres problemas son casos particulares del siguiente teorema que se establece sin demostración.

Teorema

El problema de contorno

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

tiene soluciones no triviales $x_n(t)$ solo para un conjunto numerable de valores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq, \ldots$ tales que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Los valores λ_n se llaman autovalores y las $x_n(t)$ autofunciones.

Problemas de contorno

- Se dice que λ_n es un autovalor del problema de contorno y $cx_n(t), c \in \mathbb{R}$ sus autofunciones asociadas.
- Sea V el conjunto de todas las funciones $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase 2 que cumplen las condiciones de contorno

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \qquad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

Entonces V es un espacio vectorial. Sea el operador lineal L con dominio V definido por

$$Lx(t) = -x''(t).$$

Problemas de contorno

Las soluciones del Problema de contorno

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

son las funciones no triviales $x \in V$ tales que $Lx = \lambda x$. Por esto a x se le llama autofunción asociada al autovalor λ.

4.3
La ecuación del calor

Modelo de difusión térmica en una varilla.

La ecuación del calor

Difusión del calor en una varilla "unidimensional". Partimos de los siguientes principios:

(i) El calor fluye en la dirección de temperatura decreciente, es decir, de las zonas calientes a las zonas frías.

(ii) La velocidad a la que fluye el calor a través de un área es proporcional al área y a la velocidad de cambio de la temperatura en una dirección perpendicular al área. El factor de proporcionalidad se llama conductividad térmica del material y se denotará por la constante k.

(iii) La cantidad de calor ganado o perdido por un cuerpo, es decir la variación de energía térmica, es proporcional a la masa del cuerpo y al cambio de temperatura. El factor de proporcionalidad se llama calor específico del material y se denotará por c.

La ecuación del calor

La masa de la región es $\Delta m = \rho S \Delta x$, donde ρ es la densidad de la varilla. Si Δu denota el cambio de temperatura en el intervalo de tiempo Δt en el punto x, entonces (iii) dice que la variación de energía calorífica en la región en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ es

$$\Delta H = c \Delta m \Delta u = c \rho S \Delta x \Delta u.$$

Por tanto la velocidad de variación del calor es

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = c \rho S \Delta x \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

La ecuación del calor

La variación del calor debida al flujo de calor a través de la sección de la izquierda es

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

La velocidad a la que el calor fluye a través de la sección derecha es

$$kS\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t).$$

La ecuación del calor

Tenemos entonces:

$$kS\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - kS\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = c\rho S\Delta x\frac{\Delta u}{\Delta t},$$

es decir

$$\frac{k}{c\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta t},.$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = k/c\rho$$

La ecuación del calor

En el caso de dimensión mayor a uno y sin asumir que la conductividad, el calor específico y la densidad son constantes, tenemos la ecuación del calor general,

$$\mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \nabla K \cdot \nabla u,$$

donde la conductividad K, el calor específico μ y la densidad ρ son ahora funciones de varias variables que se suponen conocidas.

Extremos a temperatura constante

Se pretende encontrar soluciones de la ecuación del calor que además cumplan las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Las soluciones también deben cumplir la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{1}$$

Si $u_1, \ldots, u_n$ cumplen la ecuación del calor y la condición de contorno entonces $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ también cumple la ecuación del calor y las condiciones de contorno, para todo $c_1, \ldots, c_n$.
Se buscarán soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Extremos a temperatura constante

Derivando se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Sustituyendo en la ecuación

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $a^2 X(x)T(t)$ se llega a

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

En consecuencia debe cumplirse que para alguna constante λ

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Extremos a temperatura constante

De la condición de contorno se deduce que $X(0) = X(L) = 0$. De modo que debemos resolver el problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X(L) = 0, \qquad T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0.$$

Ya se ha visto que solo tiene soluciones no triviales $X_n(t), T_n(t)$ para $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, donde

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad T_n(t) = e^{-t(n\pi a/L)^2},$$

de modo que

$$u_n(x,t) = e^{-t(n\pi a/L)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

verifica la ecuación del calor y las condiciones de contorno.

Extremos a temperatura constante

Supóngase que $f(0) = f(L) = 0$ y sea $F(x)$ la extensión impar $2L-$periódica de $f(x)$, es decir

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 < x \leq L \\ -f(-x), & \text{si } -L < x \leq 0 \end{cases}, \qquad F(x+2L) = F(x).$$

Considérese el desarrollo en serie de Fourier de $F(x)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

entonces

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-t(n\pi a/L)^2}$$

cumple la ecuación del calor, las condiciones de contorno y la condición inicial.

Extremos aislados

Supongamos ahora que los extremos están aislados, es decir que no hay radiación de calor al exterior. Como la transmisión de calor es proporcional a la derivada respecto a x de la temperatura, si $f(x)$ denota de nuevo la temperatura inicial, tenemos las siguientes condiciones en la frontera:

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

De nuevo se utilizará el método de separación de variables para obtener que la solución al problema de frontera es

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-t(n\pi a/L)^2},$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(n\pi x/L\right)\, dx.$$

4.4
La ecuación de ondas

Vibraciones de cuerdas y membranas.

El problema de la cuerda vibrante

- Se supone que una cuerda flexible se tensa entre dos puntos del eje horizontal x, que por conveniencia se toman como $x = 0$ y $x = l$, donde $l > 0$.
- La cuerda se deforma en una cierta curva $f(x)$ en el plano xu y a continuación se suelta.

El problema de la cuerda vibrante

- Para obtener la ecuación del movimiento se hacen algunas hipótesis simplificadoras.
- La primera es que las vibración que sigue es transversal, de modo que la coordenada vertical u depende solo de x y del tiempo t.
- Se llama $u(x,t)$ a la posición de la cuerda en el punto x y en el tiempo t.
- Entonces las derivadas $\partial u/\partial t$ y $\partial^2 u/\partial t^2$ representan la velocidad y aceleración de la cuerda.

El problema de la cuerda vibrante

Se considera un pequeño trozo de cuerda que tiene una longitud Δx cuando está en equilibrio. Si la masa del tramo es $\mu\Delta x$, donde μ es la densidad de masa que se supone constante, entonces de la segunda ley de Newton se sigue que la fuerza transversal que actúa sobre él es

$$F = \mu\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

El problema de la cuerda vibrante

- Al decir que la cuerda es flexible se está afirmando que la tensión en cualquier punto $T(x)$ tiene la dirección de la tangente. Su componente vertical es $T(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x)$.
- A continuación se supone que el movimiento de la cuerda se debe exclusivamente a la tensión, que por hipótesis es constantemente igual a T.

El problema de la cuerda vibrante

Por tanto

$$F = T \operatorname{sen} \theta(x + \Delta x) - T \operatorname{sen} \theta(x) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$

Dividiendo la expresión anterior por Δx y tomando límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

donde $c^2 = T/\mu$.

El problema de la cuerda vibrante

Se busca una solución $u(x,t)$ que cumpla las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

que expresan la hipótesis de que los extremos de la cuerda están fijos en los puntos $x = 0$ y $x = l$.

El problema de la cuerda vibrante

También se desea que la solución $u(x,t)$ cumpla las condiciones inciales

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq l,$$

que expresan la hipótesis de que la cuerda está en reposo en el momento de soltarla y que la forma que tiene viene dada por $f(x)$.

El método de separación de variables

- También se puede utilizar el método de separación de variables para resolver el problema de valor inicial-frontera para la ecuación de ondas. El plan es el mismo que para la ecuación del calor.
- En primer lugar se buscan soluciones $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ de la ecuación de ondas que cumplan la condición de contorno $u(0,t) = u(l,t) = 0$.
- Después se busca una combinación lineal de las soluciones anteriores que además satisfaga la condición inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, u(x,0) = f(x)$.

El método de separación de variables

Sea $u(x,t) = X(x)T(t)$. Derivando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas se llega a $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$, o

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x).$$

El método de separación de variables

Puesto que el lado izquierdo, como función con dominio en $\mathbb{R}^2$, es una función solo de t y el lado derecho solo de x, resulta que

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}(t) = -\lambda = \frac{X''}{X}(x),$$

para alguna constante λ.

El método de separación de variables

Además las condiciones de contorno implican que $X(0) = X(l) = 0$. De modo que $u(x,t)$ es solución de la ecuación de ondas y de las condiciones de contorno si

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0.$$

El método de separación de variables

Ya se ha visto que el problema de contorno tiene solución no trivial solo si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$ y, en este caso,

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Integrando se obtiene

$$T_n(t) = b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right).$$

De aquí

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left(b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)$$

es solución para cada entero positivo n y para cada par de constantes a_n, b_n.

La combinación lineal infinita

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left(b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)$$

formalmente satisface la ecuación de ondas, las condiciones de contorno y la condición inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi c}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Por lo tanto para que $u(x,t)$ cumpla las condiciones iniciales debe ser $a_n = 0$ para todo n y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad 0 \leq x \leq l.$$

Así que b_n deben ser los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $f(x)$.

Por tanto el desplazamiento de la cuerda en cualquier tiempo $t > 0$ viene dado (formalmente) por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right). \tag{3}$$

Cada sumando representa un modo particular de vibración de la cuerda. El primer sumando representa el modo de vibración en el que la cuerda oscila en torno a su posición de equilibrio con una frecuencia

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{n\pi c}{l} = \frac{c}{2l}$$

Esta frecuencia se llama fundamental o primer armónico de la cuerda. La frecuencia del sumando n-ésimo es n veces la frecuencia fundamental.

Solución mediante ondas viajeras

Se debe probar que la serie que define $u(x,t)$ es convergente, que las series que se obtienen derivando término a término respecto de t y respecto de x dos veces son convergentes y que se puede intercambiar la derivada con la suma infinita para demostrar que $u(x,t)$ es solución de la ecuación de ondas.

Sin embargo hay un método alternativo que prueba la validez de la solución de la ecuación de ondas.

Solución mediante ondas viajeras

Obsérvese que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right).$$

Entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right).$$

Solución mediante ondas viajeras

Sea $F(x)$ la extensión impar $2l-$ periódica de $f(x)$. Entonces $u(x,t)$ se puede escribir como

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(F(x-ct) + F(x+ct)).$$

Ahora se prueba fácilmente que $u(x,t)$ satisface la ecuación de ondas, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, si f es de clase 2 en $[0,l]$.

Para cada t fijo la gráfica de la función $y = F(x - ct)$ es la misma que la de la función $y = F(x)$ salvo por el desplazamiento ct en la dirección positiva del eje x.
Se dice que $F(x - ct)$ es una onda que viaja con velocidad c en la dirección positiva del eje x.
Análogamente $F(x + ct)$ se dice que es una onda que viaja con velocidad c en la dirección negativa del eje x.

Defínase la energía total de la cuerda respecto de la solución $u(x,t)$ mediante

$$E(t) = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\mu u_t^2(x,t) + \frac{T}{2} u_x^2(x,t) \right) dx,$$

donde

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

El primer sumando es la energía cinética y el segundo sumando representa a la energía potencial de la cuerda. Recuérdese que μ es la densidad de masa, T es el módulo de la fuerza de tensión y $c^2 = T/\mu$.

$E(t) = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\mu u_t^2(x,t) + \frac{T}{2}u_x^2(x,t)\right)\, dx$

Si $u(x,t)$ verifica la ecuación de ondas y las condiciones iniciales y frontera, entonces

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^l (\mu u_t u_{tt} + T u_x u_{xt})\, dx \\ &= T\int_0^l (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})\, dx = T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x)\, dx \\ &= T(u_t(l,t)u_x(l,t) - u_t(0,t)u_x(0,t)) = 0, \end{aligned}$$

ya que de $u(0,t) = u(l,t) = 0$ sigue que $u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0$.

Demostración de la unicidad

Sean $u(x,t)$ y $v(x,t)$ soluciones de la ecuación de ondas y las condiciones iniciales y frontera.
Entonces $z(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ satisface la ecuación de ondas, las condiciones frontera y las condiciones iniciales

$$z(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$E(t) = \int_0^l \left(\tfrac{1}{2}\mu z_t^2(x,t) + \tfrac{\mu c^2}{2} z_x^2(x,t) \right) dx$$

La energía total respecto de la solución $z(x,t)$ es constante. Por tanto

$$E(t) = E(0) = \frac{\mu}{2} \int_0^l (z_t^2(x,0) + c^2 z_x^2(x,0))\, dx = 0,$$

de donde se deduce que

$$z_t^2(x,t) + c^2 z_x^2(x,t) \equiv 0, \qquad z_t(x,t) = z_x(x,t) \equiv 0$$

y finalmente que $z(x,t) \equiv 0$.

Vibraciones radiales de una membrana circular

La ecuación bidimensional de ondas para $u(x, y, t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

expresada en coordenadas polares tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} \right),$$

donde $\bar{u}(r, \theta, t) = u(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, t)$.

Vibraciones radiales de una membrana circular

Denótese $\bar{u}(r, \theta, t)$ por $u(r, \theta, t)$ Si el problema tiene simetría radial, es decir, si u no depende del ángulo θ, entonces la ecuación de ondas se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Vibraciones radiales de una membrana circular

- Un ejemplo en el que hay simetría radial es el de las vibraciones de una membrana circular delgada en el que los desplazamientos son pequeños y en el que el movimiento en cada punto de la membrana es perpendicular al plano x, y, tal como sucede en la membrana de un tambor.
- Si $u(r,t)$ es el desplazamiento de la membrana circular de radio r_0 que está fija a lo largo de su circunferencia, entonces

Vibraciones radiales de una membrana circular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < r_0,\ t > 0,$$

$$u(R_0, t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = g(r),\ 0 < r < r_0,$$

donde $f(r)$ es el desplazamiento inicial y $g(r)$ la velocidad inicial.

Vibraciones radiales de una membrana circular

Si se buscan soluciones de la forma $u(r,t) = R(r)T(t)$, se llega a las ecuaciones

$$rR''(r) + R'(r) + \lambda^2 rR(r) = 0, \qquad T''(t) + c^2\lambda^2 T(t) = 0.$$

Después del cambio de variable independiente $r \to r/\lambda$, la primera de las dos ecuaciones es de Bessel de orden 0, cuyas soluciones se han obtenido en el Capítulo 2.

4.5
La ecuación de Laplace

Ecuaciones elípticas con datos de contorno.

La ecuación de Laplace

- La ecuación

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{4}$$

  se llama ecuación de Laplace o del potencial y aparece al modelar matemáticamente el flujo de calor en estado estacionario, vibraciones en membranas y potenciales eléctricos o gravitatorios.
- Esta ecuación en derivadas parciales no depende del tiempo, así que no se impondrán condiciones iniciales.

La ecuación de Laplace

- En los problemas que aparecen en las aplicaciones se conoce $u(x, y)$ o su derivada normal en la frontera de una región R y se pretende determinar $u(x, y)$ en el interior de R.
- El problema de determinar una solución de la ecuación de Laplace que toma sobre la frontera valores conocidos, se llama problema de Dirichlet.
- Si se conocen los valores de la derivada normal en la frontera estamos ante un problema de Neumann.

La ecuación de Laplace

- Ambos problemas pueden resolverse por el método de separación de variables si R es un rectángulo.
- Nótese además que las partes real e imaginaria de una función compleja de variable compleja que es diferenciable satisfacen la ecuación de Laplace.

El problema de Dirichlet en un rectángulo

Se quiere encontrar una función $u(x, y)$ que cumple la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

en el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ y que satisface las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = u(0, y) = u(x, b) = 0, \qquad u(a, y) = f(y).$$

El problema de Dirichlet en un rectángulo

En primer lugar se buscan soluciones no triviales

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

de la ecuación de Laplace tales que

$$u(x,0) = u(0,y) = u(x,b) = 0$$

y a continuación se busca una combinación lineal de las soluciones anteriores que cumpla $u(a,y) = f(y)$.

El problema de Dirichlet en un rectángulo

Derivando $u(x, y)$ y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

de modo que para alguna constante λ

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

El problema de Dirichlet en un rectángulo

Además las condiciones de contorno implican que

$$Y(0) = Y(b) = 0, \quad X(0) = 0.$$

Entonces $u(x, y) = X(x)Y(y)$ es solución de la ecuación de Laplace y de las condiciones de contorno si

$$Y'' + \lambda Y = 0,\ Y(0) = Y(b) = 0, \qquad X'' - \lambda X = 0,\ X(0) = 0.$$

El problema de Dirichlet en un rectángulo

El problema de contorno para $Y(y)$ tiene soluciones no triviales solo si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/b^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y, en este caso,

$$Y_n(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Resolviendo el problema de valor inicial $X'' - (n^2\pi^2/b^2)X = 0$, $X(0) = 0$, se llega a que

$$u_n(x, y) = \operatorname{sinh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

es solución de la ecuación de Laplace y de las condiciones de contorno para cada entero positivo n.

El problema de Dirichlet en un rectángulo

La función

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

es una solución (formal) de la ecuación de Laplace, de las condiciones de contorno y de las condiciones iniciales si

$$u(a,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \qquad 0 \leq y \leq b.$$

El problema de Dirichlet en un rectángulo

Si la extensión impar de $f(y)$ cumple las hipótesis del Teorema de desarrollo en serie de Fourier, entonces el problema tiene solución para

$$c_n \operatorname{sinh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = b_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,dy.$$

Es decir, para

$$c_n = \frac{2}{b\operatorname{sinh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,dy.$$

La unicidad sigue del principio del máximo que cumplen las funciones armónicas, es decir, las soluciones de la ecuación de Laplace.

Teorema

Sea $u(x, y)$ de clase dos en R, continua en $\bar{R}$ y tal que $\Delta u = 0$ en R. Entonces

$$\max_{\bar{R}} |u| = \max_{\mathcal{F}R} |u|.$$

Como una consecuencia del resultado anterior se cumple que $u = 0$ en R si $u = 0$ en $\mathcal{F}R$ y si u, v son soluciones del problema (4) y (65), entonces $u - v$ es una solución de (4) que se anula en $\mathcal{F}R$, por tanto $u - v = 0$ en R.

El problema de Neumann en un rectángulo

Se pretende encontrar una solución $u(x,t)$ de la ecuación de Laplace (4) que cumple las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = f(y) \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0 \tag{6}$$

El problema de Neumann en un rectángulo

Utilizando el método de separación de variables de manera análoga al problema anterior se llega a que

$$u(x,y) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

es solución del problema (4) y cumple las condiciones de contorno

El problema de Neumann en un rectángulo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0$$

cualesquiera que sean las constantes $c_0, c_1, \ldots$.

El problema de Neumann en un rectángulo

Se debe satisfacer

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \qquad 0 < y < b. \end{aligned}$$

El problema de Neumann en un rectángulo

Si la extensión par $F(y)$ de la función $f(y)$ cumple las hipótesis del teorema de convergencia de Fourier, entonces

$$F(y) = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,dy.$$

El problema de Neumann en un rectángulo

Por tanto necesariamente

$$\int_0^b f(y)\,dy = 0,$$

$$c_n = \frac{2}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,dy, \quad n \geq 1.$$

Así que $\int_0^b f(y)\,dy = 0$ es una condición necesaria para que haya solución que está determinada salvo la constante c_0.

4.6
Ejercicios

Problemas de aplicación y repaso.

Ejercicios

1. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(l) = 0$, donde $l > 0$.
2. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x'(0) = x'(l) = 0$, donde $l > 0$.
3. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) + x'(0) = 0, x(1) = 0$.
4. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x'(l) = 0$, donde $l > 0$.
5. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) - x'(0) = 0, x(\pi) - x'(\pi) = 0$.

1. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de $F(x) = \cos^2 x$.
2. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

3. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

Demuestre que

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.$$

4. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

5. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

6. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = x, \quad -1 \leq x < 1.$$

7. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

8. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

9. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

10. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2l-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -l \leq x < 0 \\ e^x & 0 \leq x < l \end{cases}$$

11. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2l-periódica

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x}, & -l \leq x < 0 \\ e^{x} & 0 \leq x < l \end{cases}$$

12. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de las funciones 2l-periódicas
    1. $$F(x) = e^{x}, \quad -l \leq x < l$$
    2. $$F(x) = e^{-x} \quad -l \leq x < l$$
    3. $$F(x) = \sin^2 x \quad -l \leq x < l,\ l = \pi$$
    4. $$F(x) = \sin^3 x \quad -l \leq x < l,\ l = \pi$$

13. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2π-periódica

$$F(x) = \frac{\pi \cos(ax)}{2a \sin(a\pi)}$$

14. Desarrolle la función $f(x) = 1$ en una serie de Fourier solo de senos en el intervalo $[0, \pi]$.

1. Resuelva por el método de separación de variables

$$\begin{aligned} u_t &= u_x, \\ u(0,t) &= e^{-3t} + e^{2t}. \end{aligned}$$

2. Resuelva el problema de contorno-valor inicial

$$\begin{aligned} u_t =& a^2 u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < l, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) &= 0 \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

3. Un alambre delgado de longitud $2l$ con superficie lateral aislada se curva formando una circunferencia. Se supone que la temperatura $u(x,t)$, donde x es la longitud del arco de circunferencia que se supone varía entre $-l$ y l, satisface la ecuación de difusión del calor

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -l < x < l, \, t > 0.$$

Se supone que los extremos del alambre están conectados, así que

$$u(-l,t) = u(l,t), \quad t \geq 0$$
$$u_x(-l,t) = u_x(l,t), \quad t \geq 0.$$

Se supone además que se satisface la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad -l \leq x \leq l.$$

Resuelva el problema de contorno-valor inicial planteado.

4. Resuelva el problema de contorno-valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 20, \\ u(l,t) &= 60, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 < x < l. \end{aligned}$$

5. Resuelva el problema de contorno

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \qquad t \geq 0, \\ u_x(l,t) &= -hu(l,t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $h > 0$ y $1 + hl \neq 0$.

6. Resuelva el problema de contorno-valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= 1{,}71 u_{xx}, \qquad 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right), \qquad 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

7. Una barra delgada de aluminio con coeficiente de difusión térmico $a^2 = 0{,}86$ y de longitud 10, se calienta a la temperatura uniforme de 100 grados. En el tiempo $t = 0$ los extremos de la barra se sumergen en un baño de hielo a 0 grados y se mantienen a esta temperatura. No se permite que el calor escape a través de la superficie lateral de la barra. Encuentre la temperatura de la barra en cualquier punto y en cualquier tiempo.
8. Sea la ecuación diferencial de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b.$$

Resuelva los siguientes problemas de contorno (de tipo Dirichlet)

1. $u(x, 0) = f(x)$,

$$0 = u(0, y) = u(a, y) = u(x, b).$$

2. $u(0,y) = f(y)$,

$$0 = u(x,0) = u(a,y) = u(x,b).$$

3. $u(x,b) = f(x)$,

$$0 = u(0,y) = u(a,y) = u(x,0).$$

4. $u(x,0) = f(x), u(x,b) = g(x), u(0,y) = h(y), u(a,y) = k(y)$.

9. Sea la ecuación diferencial de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b.$$

Resuelva los siguientes problemas de contorno (de tipo Neumann)

1. $u_y(x,0) = f(x)$,

$$0 = u_x(0,y) = u_x(a,y) = u_y(x,b).$$

2. $u_x(0, y) = f(y)$,

$$0 = u_y(x, 0) = u_x(a, y) = u_y(x, b).$$

3. $u_y(x, b) = f(x)$,

$$0 = u_x(0, y) = u_x(a, y) = u_y(x, 0).$$

10. Exprese el laplaciano de la función $u(x, y)$ en coordenadas polares.
11. Exprese el laplaciano de la función $u(x, y, z)$ en coordenadas cilíndricas.
12. Sea la función $u(r, \theta, t)$ y considérese la ecuación del calor en coordenadas polares:

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right).$$

Encuentre soluciones por el método de separación de variables.