Sistemas Diferenciales Lineales

José Luis Bravo

23 de diciembre de 2025

Sistemas diferenciales n-dimensionales

Definición

Un **sistema diferencial de primer orden de dimensión** n *es un sistema de ecuaciones de la forma*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots \;\; \ldots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

donde $f_1, \ldots f_n \colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *son funciones conocidas.*

Sistema diferenciales n-dimensionales

Es habitual suprimir el argumento t en las funciones incógnitas $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Así que un sistema diferencial de n ecuaciones con n incógnitas es una expresión del tipo

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Ejemplo

Por ejemplo, si $x_1 = x$, $x_2 = y$, $f_1(t, x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *y* $f_2(t, x_1, x_2) = x_1 - x_2$, *tenemos el sistema diferencial 2-dimensional*

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Sistemas diferenciales n-dimensionales

Definición

Una **solución** *es una función* $t \in I \to (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, *siendo* I *un intervalo de* $\mathbb{R}$, *tal que para*

- $x_1, \dots, x_n$ *son derivables en* t,
- $(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ *están en el dominio de* $f_1, \dots, f_n$,
- *cumplen el sistema diferencial, es decir,*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \quad \dots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Ejemplos

Ejemplo

Sea el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2x \end{cases}$$

Una solución es la función $t \in \mathbb{R} \to (x(t), y(t)) = (t, t^2)$.

Se dice que $\{x(t) = t, y(t) = t^2\}$ *es una solución.*

El problema de valor inicial

Definición

El **problema de valor inicial** *consiste en determinar una solución de*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \quad \dots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

que verifique

$$(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (x_{01}, \dots, x_{0n}),$$

donde $x_{01}, \dots, x_{0n}$ *son valores previamente fijados.*

Ejemplos

Ejemplo

El problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = x^2 \end{array} \right. \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 3/2$$

tiene la solución $t \in \mathbb{R} \to (x(t), y(t)) = (e^t, e^{2t}/2 + 1)$.

Se dice que $\{x(t) = e^t, y(t) = e^{2t}/2 + 1\}$ *es una solución.*

Existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial

Teorema

Supongamos que

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} : D \to \mathbb{K}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

son funciones continuas en el abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *y la condición inicial* $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$.

Entonces existe una solución del problema de valor inicial en un intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ *y esa solución es única.*

Ecuaciones diferenciales de orden n

Definición

Una **ecuación diferencial de orden** n *es una expresión de la forma*

$$x^{(n)}(t) = f_n(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

donde f_n *es una función conocida.*

Definición

Una **solución** *de la ecuación diferencial de orden* n *es una función* $x\colon I \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \in I$,

$$x^{(n)}(t) = f_n(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)).$$

Ecuaciones diferenciales de orden n

Definición

El problema de valor inicial para la ecuación diferencial de orden n consiste en determinar la existencia y, en su caso, la unicidad de soluciones de

$$x^{(n)} = f_n(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}),$$

tales que satisfacen la condición inicial

$$x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02},\ \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n},$$

donde $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n})$ están fijados.

Relación entre sistemas y ecuaciones

- Las soluciones de una ecuación de orden n $x^{(n)} = f_n(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ se pueden obtener a partir de las del sistema diferencial

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

- En efecto, se verifica que $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial si y solo si

$$\{x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), \dots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t)\}$$

es solución del sistema diferencial.

Relación entre sistemas y ecuaciones

- Las soluciones del problema de valor inicial

$$x^{(n)} = f_n(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

$$x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02}, \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}$$

se pueden obtener a partir de las del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$x_1(t_0) = x_{01},\ x_2(t_0) = x_{02}, \dots,\ x_n(t_0) = x_{0n}$$

Ejemplo

Ejemplo

Transformar el problema de valor inicial

$$x'''(t) + (x'(t))^2 + 3x(t) = e^t$$
$$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 0$$

en un problema de valor inicial para un sistema diferencial.

Sistemas lineales

- Un **sistema diferencial lineal** de n ecuaciones con n incógnitas tiene la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

  donde $a_{ij}, b_i \colon I \to \mathbb{K}$, siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$ e $i, j = 1, \ldots, n$.
- Si para todo $i = 1, \ldots, n$, $b_i(t) \equiv 0$, el sistema se dice **homogéneo**.

Sistemas lineales

Un sistema lineal se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

De manera resumida $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial

En el caso de un sistema diferencial lineal

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + \cdots + a_{in}(t)x_n + b_i(t),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, \dots, x_n) = a_{ij}(t).$$

Para que se cumplan las hipótesis del teorema de existencia y unicidad es suficiente que las funciones $a_{ij}(t), b_i(t)$ sean continuas en su intervalo de definición.

En todo lo que sigue se supone la continuidad de las funciones $\boldsymbol{a_{ij}(t), b_i(t)}$.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

Teorema

Si y_1, y_2 *son soluciones del sistema* **lineal homogéneo** *y* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *entonces* $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ *también es solución.*

Como consecuencia, el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo es un espacio vectorial. Para obtener todas las soluciones, será suficiente obtener una base.

Sistemas lineales con coeficientes constantes

- Supóngase que para cada i, j la función $a_{ij}(t)$ es constante e igual a a_{ij} y que $b_i(t) \equiv 0$.
- Si llamamos A a la matriz de los coeficientes (a_{ij}), el sistema lineal se puede expresar en forma vectorial como

$$x' = Ax. \tag{1}$$

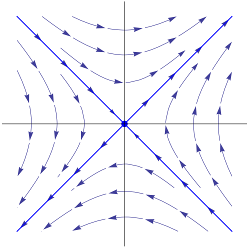
- El Teorema de existencia y unicidad dice que para cada condición inicial hay una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.
- En el caso unidimensional el sistema lineal homogéneo es la ecuación $x' = ax$, cuyas soluciones son $x(t) = ce^{at}$, donde $c \in \mathbb{K}$.

Sistemas lineales con coeficientes constantes

- Guiados por el caso unidimensional se buscan soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t} p$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$ y $p \in \mathbb{K}^n$.
- Sustituyendo en el sistema diferencial se obtiene que $e^{\lambda t} p$ es una solución no trivial si y solo si $Ap = \lambda p$ con $p \neq 0$, es decir, si y solo si p es un autovector del autovalor λ.

Sistemas lineales con coeficientes constantes

En el caso particular de $n = 2, 3$ se suele representar el **campo de direcciones** de $x' = Ax$ mediante un vector en cada punto del dominio.



Ejemplo

Representar el campo de direcciones de

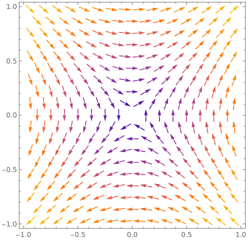
$$x' = x + y, \quad y' = x - y.$$

Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales distintos.

Ejemplo (Punto de silla)

Obtener las soluciones de

$$x' = y, \quad y' = x.$$

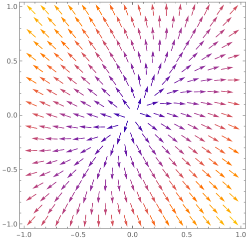


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales distintos.

Ejemplo (Nodo impropio (inestable))

Obtener las soluciones de

$$x' = 3x - y, \quad y' = 3y - x.$$

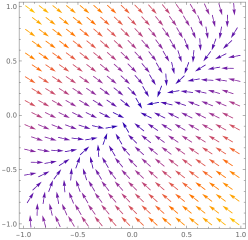


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales distintos.

Ejemplo (Nodo impropio (estable))

Obtener las soluciones de

$$x' = -2x + 2y, \quad y' = x - 2y.$$

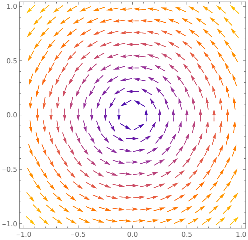


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Autovalores complejos conjugados.

Ejemplo (Centro)

Obtener las soluciones de

$$x' = -y, \quad y' = x.$$

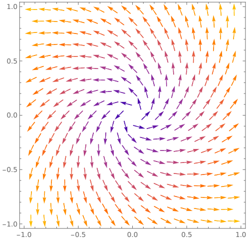


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Autovalores complejos conjugados.

Ejemplo (Foco (inestable))

Obtener las soluciones de

$$x' = x - y, \quad y' = x + y.$$

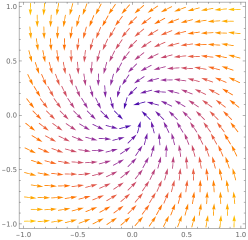


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Autovalores complejos conjugados.

Ejemplo (Foco (estable))

Obtener las soluciones de

$$x' = x - y, \quad y' = x + y.$$

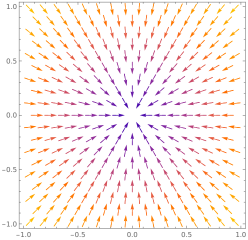


Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales iguales.

Ejemplo (Nodo propio (estable))

Obtener las soluciones de

$$x' = -x, \quad y' = -y.$$



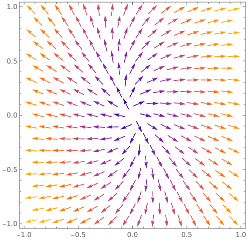
Sistemas lineales con coeficientes constantes. Dos autovalores reales iguales.

Supongamos ahora que no hay una base de autovectores.

Ejemplo (Nodo impropio)

Obtener las soluciones de

$$x' = 4x + y, \quad y' = -x + 2y.$$



Coeficientes indeterminados

Vamos a intentar resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = Ax + f(t),$$

donde A es una matriz y f es una función dada.

- Si $u_p(t)$ es una solución de la ecuación, entonces todas las soluciones son de la forma

  $$u(t) = u_p(t) + u_h(t),$$

  donde u_h es solución de $x' = Ax$.
- Si $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ y u_1, u_2 son soluciones de $x' = Ax + f_1(t)$, $x' = Ax + f_2(t)$, respectivametne, entonces

  $$u_p(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

  es solución de $x' = Ax + f$.

Coeficientes indeterminados

Por la discusión anterior, basta encontrar una solución particular u_p.

1. Si $f(t) = at^n$, buscaremos soluciones que sean polinomios de grado n o menor.
2. Si $f(t) = ae^{\lambda t}$ y λ no es autovalor de A, buscaremos soluciones que sean de de la forma

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

3. Si $f(t) = ae^{\lambda t}$ y λ es autovalor (simple) de A, buscaremos soluciones que sean de de la forma

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + x_1 t e^{\lambda t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda t} + y_1 t e^{\lambda t}.$$

Coeficientes indeterminados

Ejemplo

Encontrar una solución general del sistema lineal no homogéneo

$$y' = Ay + g = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

Encontrar una solución general de

$$y' = Ay + g = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$