# Problemas de contorno. Ecuaciones en derivadas parciales

J.L. Bravo

12 de diciembre de 2025

# Coeficientes de Fourier

Dada una función $f(x)$ definida en $-L \leq x \leq L$, buscamos coeficientes $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), \quad -L \leq x \leq L.$$

# Coeficientes de Fourier

Sea $f$ una función integrable en $[-L, L]$. Se denominan **coeficientes de Fourier** de $f$ a

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Se denomina **serie de Fourier** de $f$ a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

# Integrales de funciones trigonométricas

1. Para todo número natural $n$,
$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = 0.$$

2. Si $n \neq m$, entonces
$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = 0.$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = 0.$$

3. Si $n \neq 0$, entonces
$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = L.$$

# Convergencia

### Teorema

*Si $f$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de $f$ converge a $f$ salvo en los puntos en los que $f$ es discontinua.*
*Si $f(x)$ es continua y $f'(x)$ es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de $f$ converge a $f$.*

### Ejemplo

*Calcula la serie de Fourier de $f(x) = \sin(x)$, $x, \in [-\pi, \pi]$.*

### Ejemplo

*Calcula la serie de Fourier de $f(x) = \cos^2(x)$, $x, \in [-\pi, \pi]$.*

# Convergencia

### Ejemplo

*Dada*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

*Calcula la serie truncada con* $N = 2$ *términos.*

### Ejemplo

*Sea la función*

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

*Calcula la serie de Fourier truncada con* $N = 3$ *términos:*

$$S_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} \big( a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \big).$$

# Convergencia

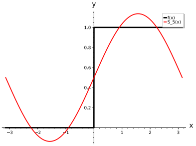
## Ejemplo

*Dada*

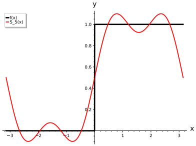
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

*Calcula la serie truncada con* $N = 2$ *términos.*

$N = 2$




$N = 3$



# Forma armónica

En ocasiones el término general del sumatorio se escribe de la siguiente forma:

$$a_n \cos(nw_0x) + b_n \sin(nw_0x) = c_n \cos(nw_0x + \delta_n),$$

donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Esta manera de escribir la seriede Fourier se denomina **forma armónica**. El término $\cos(nw_0x + \delta_n)$ es la $n$-ésima armónica de $f$, $c_n$ es la $n$-ésima amplitud armónica y $\delta_n$ el $n$-ésimo ángulo de fase de $f$.

Se define el **espectro de amplitud** de una función periódica como los puntos $(nw_0, c_n/2)$.

# Problemas de contorno

Al resolver ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables surge el problema de encontrar soluciones no triviales $x(t)$ de

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

- En el problema de valor inicial se buscan soluciones $x(t)$ tales que en un punto $t_0 \in [0, l]$ se conocen $x(t_0)$ y $x'(t_0)$.
- En un problema de contorno se buscan soluciones que cumplen ciertas ecuaciones en los extremos del intervalo $[0, l]$. Por esto se llama problema de contorno o de valores frontera.

# Problemas de contorno

A continuación se resuelven algunos casos sencillos, pero importantes.

Primer problema:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$x(0) = x(l) = 0.$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes se llega a que hay soluciones no triviales solo si

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Además para cada $n$ la solución es un múltiplo de

$$x_n(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right).$$

# Problemas de contorno

Segundo problema:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$x'(0) = x'(l) = 0.$$

Hay soluciones no triviales solo si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Además para cada $n$ la solución es un múltiplo de

$$x_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right).$$

# Problemas de contorno

Tercer problema:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

# Problemas de contorno

Estos tres problemas son casos particulares del siguiente teorema que se establece sin demostración.

**Teorema**

*El problema de contorno*

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

*tiene soluciones no triviales* $x_n(t)$ *solo para un conjunto numerable de valores* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq, \dots$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Los valores* $\lambda_n$ *se llaman autovalores y las* $x_n(t)$ *autofunciones.*

# Problemas de contorno

- Se dice que $\lambda_n$ es un autovalor del problema de contorno y $cx_n(t)$, $c \in \mathbb{R}$ sus autofunciones asociadas.
- Sea $V$ el conjunto de todas las funciones $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase 2 que cumplen las condiciones de contorno

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \qquad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

Entonces $V$ es un espacio vectorial. Sea el operador lineal $L$ con dominio $V$ definido por

$$Lx(t) = -x''(t).$$

# Problemas de contorno

Las soluciones del Problema de contorno

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0,$$

$$ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(l) + dx'(l) = 0.$$

son las funciones no triviales $x \in V$ tales que $Lx = \lambda x$. Por esto a $x$ se le llama autofunción asociada al autovalor $\lambda$.

# La ecuación del calor

Difusión del calor en una varilla "unidimensional". Partimos de los siguientes principios:

(i) El calor fluye en la dirección de temperatura decreciente, es decir, de las zonas calientes a las zonas frías.

(ii) La velocidad a la que fluye el calor a través de un área es proporcional al área y a la velocidad de cambio de la temperatura en una dirección perpendicular al área. El factor de proporcionalidad se llama conductividad térmica del material y se denotará por la constante $k$.

(iii) La cantidad de calor ganado o perdido por un cuerpo, es decir la variación de energía térmica, es proporcional a la masa del cuerpo y al cambio de temperatura. El factor de proporcionalidad se llama calor específico del material y se denotará por $c$.

# La ecuación del calor

La masa de la región es $\Delta m = \rho S \Delta x$, donde $\rho$ es la densidad de la varilla. Si $\Delta u$ denota el cambio de temperatura en el intervalo de tiempo $\Delta t$ en el punto $x$, entonces (iii) dice que la variación de energía calorífica en la región en el intervalo de tiempo de $t$ a $t + \Delta t$ es

$$\Delta H = c \Delta m \Delta u = c \rho S \Delta x \Delta u.$$

Por tanto la velocidad de variación del calor es

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = c \rho S \Delta x \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

# La ecuación del calor

La variación del calor debida al flujo de calor a través de la sección de la izquierda es

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

La velocidad a la que el calor fluye a través de la sección derecha es

$$kS\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t).$$

# La ecuación del calor

Tenemos entonces:

$$kS\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-kS\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=c\rho S\Delta x\frac{\Delta u}{\Delta t},$$

es decir

$$\frac{k}{c\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta t},.$$

Tomando límites cuando $\Delta x\to 0$ y $\Delta t\to 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a^2=k/c\rho$$

# La ecuación del calor

En el caso de dimensión mayor a uno y sin asumir que la conductividad, el calor específico y la densidad son constantes, tenemos la ecuación del calor general,

$$\mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \nabla K \cdot \nabla u,$$

donde la conductividad $K$, el calor específico $\mu$ y la densidad $\rho$ son ahora funciones de varias variables que se suponen conocidas.

## Extremos a temperatura constante

Se pretende encontrar soluciones de la ecuación del calor que además cumplan las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Las soluciones también deben cumplir la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{1}$$

Si $u_1, \dots, u_n$ cumplen la ecuación del calor y la condición de contorno entonces $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ también cumple la ecuación del calor y las condiciones de contorno, para todo $c_1, \dots, c_n$. Se buscarán soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.

# Extremos a temperatura constante

Derivando se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Sustituyendo en la ecuación

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $a^2 X(x)T(t)$ se llega a

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

En consecuencia debe cumplirse que para alguna constante $\lambda$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

# Extremos a temperatura constante

De la condición de contorno se deduce que $X(0)=X(L)=0$. De modo que debemos resolver el problema

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=X(L)=0, \qquad T'(t)+a^2\lambda T(t)=0.$$

Ya se ha visto que solo tiene soluciones no triviales $X_n(t), T_n(t)$ para $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=1,2,\ldots$, donde

$$X_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad T_n(t)=e^{-t(n\pi a/L)^2},$$

de modo que

$$u_n(x,t)=e^{-t(n\pi a/L)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n=1,2,\ldots$$

verifica la ecuación del calor y las condiciones de contorno.

# Extremos a temperatura constante

Supóngase que $f(0) = f(L) = 0$ y sea $F(x)$ la extensión impar $2L-$periódica de $f(x)$, es decir

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 < x \leq L \\ -f(-x), & \text{si } -L < x \leq 0 \end{cases}, \qquad F(x+2L) = F(x).$$

Considérese el desarrollo en serie de Fourier de $F(x)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

entonces

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-t(n\pi a/L)^2}$$

cumple la ecuación del calor, las condiciones de contorno y la condición inicial.

# Extremos aislados

Supongamos ahora que los extremos están aislados, es decir que no hay radiación de calor al exterior. Como la transmisión de calor es proporcional a la derivada respecto a $x$ de la temperatura, si $f(x)$ denota de nuevo la temperatura inicial, tenemos las siguientes condiciones en la frontera:

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

De nuevo se utilizará el método de separación de variables para obtener que la solución al problema de frontera es

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-t(n\pi a/L)^2},$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(n\pi x/L\right)\, dx.$$