Ejercicios de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Tema 4. Ecuaciones en derivadas parciales

Series de Fourier

1. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de $F(x) = \cos^2 x$.

2. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

3. Calcule el desarrollo en serie de Fourier truncado en $N = 2$ de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

4. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

5. Calcule el desarrollo en serie de Fourier truncado en $N = 2$ de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

6. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = x, \quad -1 \leq x < 1.$$

7. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica

$$F(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

8. Calcule el desarrollo en serie de Fourier truncado en $N = 2$ de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

9. Calcule el desarrollo en serie de Fourier truncado en $N = 2$ de la función 4-periódica

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

10. Calcule el desarrollo en serie de Fourier de las funciones 2l-periódicas

    (a)
    $$F(x) = \sin^2 x \quad -l \leq x < l,\ l = \pi$$

    (b)
    $$F(x) = \sin^3 x \quad -l \leq x < l,\ l = \pi$$

11. El desarrollo en serie de Fourier de $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ es la suma de los desarrollos en serie de Fourier de $F_1(x)$ y $F_2(x)$? Justificar.

12. Sin hacer el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones, responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

    (a) ¿Cuál es el desarrollo en serie de Fourier de la función 2π-periódica $F(x) = 1$ si $-\pi \leq x < \pi$? ¿Y de la función 2 periódica $F(x) = 1$ si $-1 \leq x < 1$?

    (b) ¿Cuál es el desarrollo en serie de Fourier de la función 2π-periódica $F(x) = \cos(x) + \cos(2x)$ si $-\pi \leq x < \pi$? ¿Coincide con el desarrollo en serie de Fourier de la función 2-periódica $F(x) = \cos(x) + \cos(2x)$ si $-1 \leq x < 1$?

Problemas de contorno

1. Resuelva el problema de contorno $x'' + x = 0$, $x(0) = x(1) = 0$.
2. Resuelva el problema de contorno $x'' + x = 0$, $x'(0) = x'(\pi) = 0$
3. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(1) = 0$.
4. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x'(0) = x'(\pi) = 0$.
5. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = x(1) = 1$.
6. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.
7. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) + x'(0) = 0$, $x(1) = 1$.
8. Resuelva el problema de contorno $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) - x'(0) = 0$, $x(\pi) - x'(\pi) = 0$.

Ecuaciones en derivadas parciales

1. Resuelva por el método de separación de variables

$$\begin{aligned} u_t &= u_x, \\ u(0,t) &= e^{-3t} + e^{2t}. \end{aligned}$$

2. Encuentre todas las soluciones que pueda por separación de variables de

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < 1.$$

3. Resuelva el problema de contorno-valor inicial de la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0 \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

4. Un alambre delgado de longitud $2l$ con superficie lateral aislada se curva formando una circunferencia. Se supone que la temperatura $u(x,t)$, donde x es la longitud del arco de circunferencia que se supone varía entre $-l$ y l, satisface la ecuación de difusión del calor

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -l < x < l,\ t > 0.$$

Se supone que los extremos del alambre están conectados, así que

$$\begin{aligned} u(-l,t) &= u(l,t), \quad t \geq 0 \\ u_x(-l,t) &= u_x(l,t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Se supone además que se satisface la condición inicial

$$u(x,0) = \cos(\pi x / l), \quad -l \leq x \leq l.$$

Resuelva el problema de contorno-valor inicial planteado.

5. Resuelva el problema de contorno-valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 20, \\ u(l,t) &= 60, \\ u(x,0) &= 20 + 60(x-l) + \sin(x/l), \qquad 0 < x < l. \end{aligned}$$

6. Resuelva el problema de contorno-valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= 1.71 u_{xx}, \qquad 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right), \qquad 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

7. Una barra delgada de aluminio con coeficiente de difusión térmico $a^2 = 0.86$ y de longitud 10, se calienta a la temperatura uniforme de 100 grados. En el tiempo $t = 0$ los extremos de la barra se sumergen en un baño de hielo a 0 grados y se mantienen a esta temperatura. No se permite que el calor escape a través de la superficie lateral de la barra. Encuentre la temperatura de la barra en cualquier punto y en cualquier tiempo.