

## Ejercicios Tema 1

1. Calcular el área de un triángulo esférico de ángulos  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  y  $80^\circ$  en una esfera de radio  $1m$ .

0.5236m

2. Calcular el área de un triángulo esférico con todos sus ángulos de  $170^\circ$  en una esfera de radio  $10m$ .

575.96m

3. Calcular el área de un cuadrilátero esférico de ángulos  $110^\circ$  en una esfera de radio  $2m$ .

5.58505m

4. Calcular el área de un polígono de ángulos  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $150^\circ$  en una esfera de radio  $3m$ .

10.99557m

5. Discutir si son posibles los siguientes triángulos esféricos rectángulos. En caso de ser posibles, obtener los lados y ángulos que faltan.

a) Triángulo de ángulos  $60^\circ$  y  $70^\circ$ .

b) Triángulo de ángulos  $120^\circ$  y  $100^\circ$ .

c) Triángulo de ángulos  $120^\circ$  y  $20^\circ$ .

d) Triángulo de ángulos  $120^\circ$  y  $70^\circ$ .

e) Triángulo de ángulos  $190^\circ$  y  $120^\circ$ .

f) Triángulo de ángulos  $40^\circ$  y  $50^\circ$ .

g) Triángulo de catetos  $60^\circ$  y  $70^\circ$ .

h) Triángulo de catetos  $120^\circ$  y  $100^\circ$ .

i) Triángulo de catetos  $120^\circ$  y  $70^\circ$ .

j) Triángulo de catetos  $190^\circ$  y  $120^\circ$ .

k) Triángulo de catetos  $40^\circ$  y  $50^\circ$ .

l) Hipotenusa  $70^\circ$  y cateto  $30^\circ$ .

m) Hipotenusa  $70^\circ$  y cateto  $120^\circ$ .

n) Hipotenusa  $90^\circ$  y cateto  $50^\circ$ .

ñ) Hipotenusa  $90^\circ$  y cateto  $110^\circ$ .

o) Hipotenusa  $110^\circ$  y cateto  $40^\circ$ .

p) Hipotenusa  $110^\circ$  y cateto  $140^\circ$ .

q) Hipotenusa  $110^\circ$  y cateto  $100^\circ$ .

r) Hipotenusa  $80^\circ$  y cateto  $85^\circ$ .

- |   |   |
|---|---|
| a) Hipotenusa $77^{\circ} 52' 10.3517595242010''$<br>Cateto $57^{\circ} 51' 11.8749582715391''$<br>Cateto $66^{\circ} 44' 18.0203041381028''$   | k) Hipotenusa $60^{\circ} 30' 4.66476802687976''$<br>Ángulo $47^{\circ} 36' 21.2902384872432''$<br>Ángulo $61^{\circ} 39' 33.2120760005200''$ |
| b) Hipotenusa $84^{\circ} 9' 25.3012802620651''$<br>Cateto $120^{\circ} 30' 41.8819839316420''$<br>Cateto $101^{\circ} 34' 0.768656199390534''$ | l) Cateto $66^{\circ} 44' 18.0203041381901''$<br>Ángulo $32^{\circ} 8' 48.1250417284173''$<br>Ángulo $77^{\circ} 52' 10.3517595242010''$      |
| c) No tiene solución.   | m) Cateto $133^{\circ} 9' 36.6400793462526''$<br>Ángulo $112^{\circ} 50' 17.3068199238041''$<br>Ángulo $129^{\circ} 4' 50.6732227201574''$    |
| d) Hipotenusa $102^{\circ} 7' 49.6482404758572''$<br>Cateto $122^{\circ} 8' 48.1250417284318''$<br>Cateto $66^{\circ} 44' 18.0203041381901''$   | n) Cateto $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$<br>Ángulo $50^{\circ} 0' 0.000000000000000''$<br>Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$     |
| e) No tiene solución  | ñ) Cateto $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$<br>Ángulo $110^{\circ} 0' 0.000000000000000''$<br>Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$    |
| f) No tiene solución  | o) Cateto $116^{\circ} 31' 4.02666123193922''$<br>Ángulo $43^{\circ} 9' 36.6400793459616''$<br>Ángulo $107^{\circ} 46' 57.60868525666223''$   |
| g) Hipotenusa $80^{\circ} 9' 12.4130165973329''$<br>Ángulo $61^{\circ} 31' 7.54218717786716''$<br>Ángulo $72^{\circ} 30' 17.1332748008135''$    | p) Cateto $63^{\circ} 28' 55.9733387681190''$<br>Ángulo $136^{\circ} 50' 23.3599206539802''$<br>Ángulo $72^{\circ} 13' 2.39131474340684''$    |
| h) Hipotenusa $85^{\circ} 1' 8.66884105611825''$<br>Ángulo $119^{\circ} 37' 17.9467507038498''$<br>Ángulo $98^{\circ} 40' 55.9340437661740''$   | q) No tiene solución  |
| i) Hipotenusa $99^{\circ} 50' 47.5869834027253''$<br>Ángulo $118^{\circ} 28' 52.4578128221328''$<br>Ángulo $72^{\circ} 30' 17.1332748008135''$  | r) No tiene solución  |
| j) No hay solución  |   |

6. Discutir si son posibles los siguientes triángulos esféricos rectángulos. En caso de ser posibles, obtener los lados y ángulos que faltan.

- |   |  |
|---|--|
| a) Hipotenusa $70^{\circ}$ y ángulo $30^{\circ}$ .      | j) Cateto $110^{\circ}$ y ángulo opuesto $70^{\circ}$ .    |
| b) Hipotenusa $70^{\circ}$ y ángulo $120^{\circ}$ .     | k) Cateto $110^{\circ}$ y ángulo opuesto $110^{\circ}$ .   |
| c) Hipotenusa $90^{\circ}$ y ángulo $50^{\circ}$ .      | l) Cateto $60^{\circ}$ y ángulo adyacente $70^{\circ}$ .   |
| d) Hipotenusa $90^{\circ}$ y ángulo $110^{\circ}$ .     | m) Cateto $60^{\circ}$ y ángulo adyacente $170^{\circ}$ .  |
| e) Hipotenusa $110^{\circ}$ y ángulo $40^{\circ}$ .     | n) Cateto $90^{\circ}$ y ángulo adyacente $40^{\circ}$ .   |
| f) Hipotenusa $110^{\circ}$ y ángulo $140^{\circ}$ .    | ñ) Cateto $110^{\circ}$ y ángulo adyacente $150^{\circ}$ . |
| g) Cateto $70^{\circ}$ y ángulo opuesto $80^{\circ}$ .  | o) Cateto $110^{\circ}$ y ángulo adyacente $30^{\circ}$ .  |
| h) Cateto $70^{\circ}$ y ángulo opuesto $160^{\circ}$ . | p) Cateto $160^{\circ}$ y ángulo adyacente $110^{\circ}$ . |
| i) Cateto $90^{\circ}$ y ángulo opuesto $100^{\circ}$ . |  |

a) Cateto $67^{\circ} 12' 14.8418681094772''$ Ángulo $78^{\circ} 49' 47.1740409163758''$ Cateto $28^{\circ} 1' 27.5544249768864''$	j) No hay solución
b) Cateto $126^{\circ} 3' 8.59943659661803''$ Ángulo $120^{\circ} 38' 32.4313726415858''$ Cateto $125^{\circ} 31' 52.8519460950047''$	k) Solución 1: Cateto $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Hipotenusa $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Solución 2: Cateto $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Hipotenusa $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$
c) Cateto $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Cateto $50^{\circ} 0' 0.000000000000000''$	l) Cateto $67^{\circ} 12' 14.8418681094772''$ Ángulo $61^{\circ} 58' 32.4455750230991''$ Hipotenusa $78^{\circ} 49' 47.1740409163758''$
d) Cateto $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Cateto $110^{\circ} 0' 0.000000000000000''$	m) Cateto $171^{\circ} 19' 4.06595623376779''$ Ángulo $85^{\circ} 1' 8.66884105606005''$ Hipotenusa $119^{\circ} 37' 17.9467507038498''$
e) Cateto $115^{\circ} 24' 49.5607681773254''$ Ángulo $106^{\circ} 0' 46.4237768183229''$ Cateto $37^{\circ} 9' 30.7949185856851''$	n) Cateto $40^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Ángulo $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$ Hipotenusa $90^{\circ} 0' 0.000000000000000''$
f) Cateto $64^{\circ} 35' 10.4392318226746''$ Ángulo $73^{\circ} 59' 13.5762231816771''$ Cateto $142^{\circ} 50' 29.2050814142567''$	ñ) Cateto $151^{\circ} 31' 7.54218717792537''$ Ángulo $99^{\circ} 50' 47.5869834027253''$ Hipotenusa $72^{\circ} 30' 17.1332748008426''$
g) Solución 1: Cateto $28^{\circ} 58' 36.2360321367014''$ Ángulo $30^{\circ} 30' 41.8819839316857''$ Hipotenusa $72^{\circ} 35' 24.5326240627328''$ Solución 2: Cateto $151^{\circ} 1' 23.7639678632841''$ Ángulo $149^{\circ} 29' 18.1180160683580''$ Hipotenusa $107^{\circ} 24' 35.4673759373254''$	o) Cateto $28^{\circ} 28' 52.4578128220746''$ Ángulo $99^{\circ} 50' 47.5869834027253''$ Hipotenusa $107^{\circ} 29' 42.8667251991574''$
h) No hay solución	p) Cateto $136^{\circ} 46' 50.9559826289187''$ Ángulo $152^{\circ} 0' 32.7934159816941''$ Hipotenusa $46^{\circ} 46' 50.9559826290351''$
i) No hay solución	

7. Discutir si son posibles los siguientes triángulos esféricos. En caso de ser posibles, obtener los lados y ángulos que faltan.

a)  $A = 60^{\circ}0', B = 60^{\circ}0', C = 60^{\circ}0'.$

b)  $A = 70^{\circ}0', B = 70^{\circ}0', C = 70^{\circ}0'.$

c)  $A = 110^{\circ}0', B = 110^{\circ}0', C = 110^{\circ}0'.$

d)  $A = 120^{\circ}0', B = 120^{\circ}0', C = 120^{\circ}0'.$

e)  $A = 120^{\circ}0', B = 120^{\circ}0', C = 110^{\circ}0'.$

f)  $A = 70^{\circ}0', B = 70^{\circ}0', C = 150^{\circ}0'.$

g)  $A = 60^{\circ}34', B = 70^{\circ}34', C = 59^{\circ}10'.$

h)  $A = 120^{\circ}13', B = 40^{\circ}45', C = 80^{\circ}14'.$

i)  $A = 50^{\circ}34', B = 62^{\circ}45', C = 61^{\circ}34'.$

j)  $A = 30^{\circ}34', B = 40^{\circ}23', C = 80^{\circ}34'.$

- k)  $A = 150^{\circ}32'$ ,  $B = 140^{\circ}43'$ ,  $C = 150^{\circ}34'$ .  
 l)  $A = 190^{\circ}0'$ ,  $B = 50^{\circ}0'$ ,  $C = 60^{\circ}0'$ .  
 m)  $a = 60^{\circ}0'$ ,  $b = 60^{\circ}0'$ ,  $c = 60^{\circ}0'$ .  
 n)  $a = 70^{\circ}0'$ ,  $b = 70^{\circ}0'$ ,  $c = 70^{\circ}0'$ .  
 ñ)  $a = 110^{\circ}0'$ ,  $b = 110^{\circ}0'$ ,  $c = 110^{\circ}0'$ .  
 o)  $a = 120^{\circ}0'$ ,  $b = 120^{\circ}0'$ ,  $c = 120^{\circ}0'$ .  
 p)  $a = 120^{\circ}0'$ ,  $b = 120^{\circ}0'$ ,  $c = 110^{\circ}0'$ .  
 q)  $a = 70^{\circ}0'$ ,  $b = 70^{\circ}0'$ ,  $c = 150^{\circ}0'$ .  
 r)  $a = 60^{\circ}34'$ ,  $b = 70^{\circ}34'$ ,  $c = 59^{\circ}10'$ .  
 s)  $a = 120^{\circ}13'$ ,  $b = 40^{\circ}45'$ ,  $c = 80^{\circ}14'$ .  
 t)  $a = 50^{\circ}34'$ ,  $b = 62^{\circ}45'$ ,  $c = 61^{\circ}34'$ .  
 u)  $a = 30^{\circ}34'$ ,  $b = 40^{\circ}23'$ ,  $c = 80^{\circ}34'$ .  
 v)  $a = 150^{\circ}32'$ ,  $b = 140^{\circ}43'$ ,  $c = 150^{\circ}34'$ .  
 w)  $a = 190^{\circ}0'$ ,  $b = 50^{\circ}0'$ ,  $c = 60^{\circ}0'$ .

- |   |   |
|---|---|
| a) No hay solución                          | Lado $84^{\circ} 24'$ 11.8900048049982"     |
| b) Lado $58^{\circ} 40'$ 51.3749731022981"  | Lado $148^{\circ} 1'$ 29.2102326294407"     |
| Lado $58^{\circ} 40'$ 51.3749731022981"     | g) Lado $35^{\circ} 10'$ 4.67049944584141"  |
| Lado $58^{\circ} 40'$ 51.3749731022981"     | Lado $38^{\circ} 35'$ 1.62190461572027"     |
| c) Lado $104^{\circ} 45'$ 53.9125872431323" | Lado $34^{\circ} 36'$ 4.88950689253397"     |
| Lado $104^{\circ} 45'$ 53.9125872431323"    | h) Lado $125^{\circ} 37'$ 51.1025443408289" |
| Lado $104^{\circ} 45'$ 53.9125872431323"    | Lado $37^{\circ} 52'$ 39.3615977980371"     |
| d) Lado $109^{\circ} 28'$ 16.3942841665121" | Lado $112^{\circ} 2'$ 6.56154365802649"     |
| Lado $109^{\circ} 28'$ 16.3942841665121"    | i) No hay solución                          |
| Lado $109^{\circ} 28'$ 16.3942841665121"    | j) No hay solución                          |
| e) Lado $113^{\circ} 50'$ 42.2776567631518" | k) Lado $129^{\circ} 10'$ 11.5695872610668" |
| Lado $113^{\circ} 50'$ 42.2776567631518"    | Lado $93^{\circ} 44'$ 15.3032307031099"     |
| Lado $97^{\circ} 2'$ 51.2849591049016"      | Lado $129^{\circ} 14'$ 32.1029958215659"    |
| f) Lado $84^{\circ} 24'$ 11.8900048049982"  | l) No hay solución                          |

m) Ángulo $70^{\circ} 31' 43.6057158335170''$ Ángulo $70^{\circ} 31' 43.6057158335170''$ Ángulo $70^{\circ} 31' 43.6057158335170''$	q) No hay solución
n) Ángulo $75^{\circ} 14' 6.08741275686771''$ Ángulo $75^{\circ} 14' 6.08741275686771''$ Ángulo $75^{\circ} 14' 6.08741275686771''$	r) Ángulo $66^{\circ} 39' 15.6996617040422''$ Ángulo $83^{\circ} 47' 39.0278589766822''$ Ángulo $64^{\circ} 51' 0.838520323450211''$
ñ) Ángulo $121^{\circ} 19' 8.62502689764369''$ Ángulo $121^{\circ} 19' 8.62502689764369''$ Ángulo $121^{\circ} 19' 8.62502689764369''$	s) Ángulo $169^{\circ} 8' 30.4569913145388''$ Ángulo $8^{\circ} 10' 51.6530757997753''$ Ángulo $12^{\circ} 24' 21.9932035187885''$
o) Ángulo $179^{\circ} 59' 59.9918680582196''$ Ángulo $179^{\circ} 59' 59.9918680582196''$ Ángulo $179^{\circ} 59' 59.9918680582196''$	t) Ángulo $57^{\circ} 44' 59.2336963725684''$ Ángulo $76^{\circ} 46' 11.7147864074213''$ Ángulo $74^{\circ} 20' 36.9032057106961''$
p) Ángulo $145^{\circ} 32' 31.3718917438528''$ Ángulo $145^{\circ} 32' 31.3718917438528''$ Ángulo $142^{\circ} 7' 32.7377999843447''$	u) No hay solución v) No hay solución w) No hay solución

8. Discutir si son posibles los siguientes triángulos esféricos. En caso de ser posibles, obtener los lados y ángulos que faltan.

- |   |   |
|---|---|
| a) $a = 60^{\circ}0'$ , $B = 60^{\circ}0'$ , $C = 60^{\circ}0'$ .       | m) $A = 60^{\circ}0'$ , $B = 60^{\circ}0'$ , $c = 60^{\circ}0'$ .       |
| b) $a = 70^{\circ}0'$ , $B = 70^{\circ}0'$ , $C = 70^{\circ}0'$ .       | n) $A = 70^{\circ}0'$ , $B = 70^{\circ}0'$ , $c = 70^{\circ}0'$ .       |
| c) $a = 110^{\circ}0'$ , $B = 110^{\circ}0'$ , $C = 110^{\circ}0'$ .    | ñ) $A = 110^{\circ}0'$ , $B = 110^{\circ}0'$ , $c = 110^{\circ}0'$ .    |
| d) $a = 120^{\circ}0'$ , $B = 120^{\circ}0'$ , $C = 120^{\circ}0'$ .    | o) $A = 120^{\circ}0'$ , $B = 120^{\circ}0'$ , $c = 120^{\circ}0'$ .    |
| e) $a = 120^{\circ}0'$ , $B = 120^{\circ}0'$ , $C = 110^{\circ}0'$ .    | p) $A = 120^{\circ}0'$ , $B = 120^{\circ}0'$ , $c = 110^{\circ}0'$ .    |
| f) $a = 70^{\circ}0'$ , $B = 70^{\circ}0'$ , $C = 150^{\circ}0'$ .      | q) $A = 70^{\circ}0'$ , $B = 70^{\circ}0'$ , $c = 150^{\circ}0'$ .      |
| g) $a = 60^{\circ}34'$ , $B = 70^{\circ}34'$ , $C = 59^{\circ}10'$ .    | r) $A = 60^{\circ}34'$ , $B = 70^{\circ}34'$ , $c = 59^{\circ}10'$ .    |
| h) $a = 120^{\circ}13'$ , $B = 40^{\circ}45'$ , $C = 80^{\circ}14'$ .   | s) $A = 120^{\circ}13'$ , $B = 40^{\circ}45'$ , $c = 80^{\circ}14'$ .   |
| i) $a = 50^{\circ}34'$ , $B = 62^{\circ}45'$ , $C = 61^{\circ}34'$ .    | t) $A = 50^{\circ}34'$ , $B = 62^{\circ}45'$ , $c = 61^{\circ}34'$ .    |
| j) $a = 30^{\circ}34'$ , $B = 40^{\circ}23'$ , $C = 80^{\circ}34'$ .    | u) $A = 30^{\circ}34'$ , $B = 40^{\circ}23'$ , $c = 80^{\circ}34'$ .    |
| k) $a = 150^{\circ}32'$ , $B = 140^{\circ}43'$ , $C = 150^{\circ}34'$ . | v) $A = 150^{\circ}32'$ , $B = 140^{\circ}43'$ , $c = 150^{\circ}34'$ . |
| l) $a = 190^{\circ}0'$ , $B = 50^{\circ}0'$ , $C = 60^{\circ}0'$ .      | w) $A = 190^{\circ}0'$ , $B = 50^{\circ}0'$ , $c = 60^{\circ}0'$ .      |

- |   |   |
|---|---|
| a) Ángulo $82^{\circ} 49'$ 9.27918675023830"<br>Lado $49^{\circ} 6'$ 23.7792631287593"<br>Lado $49^{\circ} 6'$ 23.7792631287593"      | m) Ángulo $82^{\circ} 49'$ 9.27918675023830"<br>Lado $49^{\circ} 6'$ 23.7792631287593"<br>Lado $49^{\circ} 6'$ 23.7792631287593"      |
| b) Ángulo $79^{\circ} 20'$ 12.8693663281738"<br>Lado $63^{\circ} 57'$ 59.5967055357469"<br>Lado $63^{\circ} 57'$ 59.5967055357469"    | n) Ángulo $79^{\circ} 20'$ 12.8693663281738"<br>Lado $63^{\circ} 57'$ 59.5967055357469"<br>Lado $63^{\circ} 57'$ 59.5967055357469"    |
| c) Ángulo $114^{\circ} 46'$ 14.8285321925650"<br>Lado $103^{\circ} 28'$ 4.20321268733824"<br>Lado $103^{\circ} 28'$ 4.20321268733824" | ñ) Ángulo $114^{\circ} 46'$ 14.8285321925650"<br>Lado $103^{\circ} 28'$ 4.20321268733824"<br>Lado $103^{\circ} 28'$ 4.20321268733824" |
| d) Ángulo $128^{\circ} 40'$ 55.8748325618799"<br>Lado $106^{\circ} 6'$ 7.60950714966748"<br>Lado $106^{\circ} 6'$ 7.60950714966748"   | o) Ángulo $128^{\circ} 40'$ 55.8748325618799"<br>Lado $106^{\circ} 6'$ 7.60950714966748"<br>Lado $106^{\circ} 6'$ 7.60950714966748"   |
| e) Ángulo $125^{\circ} 18'$ 12.9624408886302"<br>Lado $113^{\circ} 13'$ 8.95620816416340"<br>Lado $94^{\circ} 18'$ 21.4788552822429"  | p) Ángulo $120^{\circ} 25'$ 55.1291455778410"<br>Lado $109^{\circ} 17'$ 43.2338471924304"<br>Lado $109^{\circ} 17'$ 43.2338471924304" |
| f) Ángulo $62^{\circ} 48'$ 47.0499638624315"<br>Lado $96^{\circ} 55'$ 47.6657504361356"<br>Lado $148^{\circ} 6'$ 57.4850416597910"    | q) Ángulo $151^{\circ} 50'$ 52.1129640301224"<br>Lado $84^{\circ} 45'$ 49.7182099397178"<br>Lado $84^{\circ} 45'$ 49.7182099397178"   |
| g) Ángulo $76^{\circ} 51'$ 23.8811950194649"<br>Lado $57^{\circ} 30'$ 4.95365360175492"<br>Lado $50^{\circ} 10'$ 12.5025910625409"    | r) Ángulo $75^{\circ} 4'$ 50.2627375088632"<br>Lado $50^{\circ} 42'$ 26.7481631533301"<br>Lado $56^{\circ} 55'$ 43.5435783311550"     |
| h) Ángulo $116^{\circ} 53'$ 20.6226808949723"<br>Lado $39^{\circ} 13'$ 50.8973364226113"<br>Lado $107^{\circ} 17'$ 6.59182867535856"  | s) Ángulo $61^{\circ} 30'$ 49.6685154080042"<br>Lado $104^{\circ} 19'$ 29.7128572722431"<br>Lado $47^{\circ} 2'$ 48.3337042936182"    |
| i) Ángulo $73^{\circ} 49'$ 32.8965325586614"<br>Lado $45^{\circ} 38'$ 18.6934282291331"<br>Lado $45^{\circ} 0'$ 23.1605892112711"     | t) Ángulo $87^{\circ} 55'$ 51.3999869393883"<br>Lado $42^{\circ} 48'$ 55.3875460948620"<br>Lado $51^{\circ} 28'$ 13.4732137892570"    |
| j) Ángulo $64^{\circ} 49'$ 9.55483024092973"<br>Lado $21^{\circ} 21'$ 3.73344696420827"<br>Lado $33^{\circ} 39'$ 55.5586238712131"    | u) Ángulo $127^{\circ} 0'$ 15.1249069490586"<br>Lado $38^{\circ} 54'$ 58.9757758414198"<br>Lado $53^{\circ} 9'$ 41.9281608500460"     |
| k) Ángulo $160^{\circ} 54'$ 38.9128866422689"<br>Lado $72^{\circ} 14'$ 37.2248882755230"<br>Lado $132^{\circ} 20'$ 25.5967393616447"  | v) Ángulo $160^{\circ} 56'$ 11.6576496979687"<br>Lado $132^{\circ} 15'$ 30.8553094909294"<br>Lado $72^{\circ} 17'$ 31.2861321743694"  |
| l) No hay solución  | w) No hay solución  |

9. Discutir si son posibles los siguientes triángulos esféricos. En caso de ser posibles, obtener los lados y ángulos que faltan.

- |  |  |
|--|--|
| a) $A = 60^{\circ}0', B = 60^{\circ}0', a = 60^{\circ}0'.$       | m) $a = 60^{\circ}0', b = 60^{\circ}0', A = 60^{\circ}0'.$               |
| b) $A = 70^{\circ}0', B = 70^{\circ}0', a = 70^{\circ}0'.$       | n) $a = 70^{\circ}0', b = 70^{\circ}0', A = 70^{\circ}0'.$               |
| c) $A = 110^{\circ}0', B = 110^{\circ}0', a = 110^{\circ}0'.$    | $\tilde{n}$ ) $a = 110^{\circ}0', b = 110^{\circ}0', A = 110^{\circ}0'.$ |
| d) $A = 120^{\circ}0', B = 120^{\circ}0', a = 120^{\circ}0'.$    | o) $a = 120^{\circ}0', b = 120^{\circ}0', A = 120^{\circ}0'.$            |
| e) $A = 120^{\circ}0', B = 120^{\circ}0', a = 110^{\circ}0'.$    | p) $a = 120^{\circ}0', b = 120^{\circ}0', A = 110^{\circ}0'.$            |
| f) $A = 70^{\circ}0', B = 70^{\circ}0', a = 150^{\circ}0'.$      | q) $a = 70^{\circ}0', b = 70^{\circ}0', A = 150^{\circ}0'.$              |
| g) $A = 60^{\circ}34', B = 70^{\circ}34', a = 59^{\circ}10'.$    | r) $a = 60^{\circ}34', b = 70^{\circ}34', A = 59^{\circ}10'.$            |
| h) $A = 120^{\circ}13', B = 40^{\circ}45', a = 80^{\circ}14'.$   | s) $a = 120^{\circ}13', b = 40^{\circ}45', A = 80^{\circ}14'.$           |
| i) $A = 50^{\circ}34', B = 62^{\circ}45', a = 61^{\circ}34'.$    | t) $a = 50^{\circ}34', b = 62^{\circ}45', A = 61^{\circ}34'.$            |
| j) $A = 30^{\circ}34', B = 40^{\circ}23', a = 80^{\circ}34'.$    | u) $a = 30^{\circ}34', b = 40^{\circ}23', A = 80^{\circ}34'.$            |
| k) $A = 150^{\circ}32', B = 140^{\circ}43', a = 150^{\circ}34'.$ | v) $a = 150^{\circ}32', b = 140^{\circ}43', A = 150^{\circ}34'.$         |
| l) $A = 190^{\circ}0', B = 50^{\circ}0', a = 60^{\circ}0'.$      | w) $a = 190^{\circ}0', b = 50^{\circ}0', A = 60^{\circ}0'.$              |

10. Discutir si son posibles los siguientes triángulos esféricos. En caso de ser posibles, obtener los lados y ángulos que faltan.

- |   |  |
|---|--|
| a) $A = 60^{\circ}0', b = 60^{\circ}0', c = 60^{\circ}0'.$    | g) $A = 60^{\circ}34', b = 70^{\circ}34', c = 59^{\circ}10'.$    |
| b) $A = 70^{\circ}0', b = 70^{\circ}0', c = 70^{\circ}0'.$    | h) $A = 120^{\circ}13', b = 40^{\circ}45', c = 80^{\circ}14'.$   |
| c) $A = 110^{\circ}0', b = 110^{\circ}0', c = 110^{\circ}0'.$ | i) $A = 50^{\circ}34', b = 62^{\circ}45', c = 61^{\circ}34'.$    |
| d) $A = 120^{\circ}0', b = 120^{\circ}0', c = 120^{\circ}0'.$ | j) $A = 30^{\circ}34', b = 40^{\circ}23', c = 80^{\circ}34'.$    |
| e) $A = 120^{\circ}0', b = 120^{\circ}0', c = 110^{\circ}0'.$ | k) $A = 150^{\circ}32', b = 140^{\circ}43', c = 150^{\circ}34'.$ |
| f) $A = 70^{\circ}0', b = 70^{\circ}0', c = 150^{\circ}0'.$   | l) $A = 190^{\circ}0', b = 50^{\circ}0', c = 60^{\circ}0'.$      |

- |   |   |
|---|---|
| a) Lado $51^{\circ} 19'$ 4.12516743797460"<br>Ángulo $73^{\circ} 53'$ 52.3904928503907"<br>Ángulo $73^{\circ} 53'$ 52.3904928503907"    | g) Lado $55^{\circ} 21'$ 29.4783303213480"<br>Ángulo $86^{\circ} 38'$ 37.4785502850427"<br>Ángulo $65^{\circ} 21'$ 50.2262199091201"  |
| b) Lado $65^{\circ} 13'$ 45.1714678074641"<br>Ángulo $76^{\circ} 31'$ 55.7967873126618"<br>Ángulo $76^{\circ} 31'$ 55.7967873126618"    | h) Lado $101^{\circ} 15'$ 32.2327756519662"<br>Ángulo $35^{\circ} 6'$ 33.1927227487613"<br>Ángulo $60^{\circ} 15'$ 48.4450931142492"  |
| c) Lado $100^{\circ} 39'$ 47.1306336718844"<br>Ángulo $116^{\circ} 2'$ 0.403294464224018"<br>Ángulo $116^{\circ} 2'$ 0.403294464224018" | i) Lado $44^{\circ} 23'$ 28.6563231680775"<br>Ángulo $78^{\circ} 58'$ 32.0422634008573"<br>Ángulo $76^{\circ} 8'$ 34.7252903927583"   |
| d) Lado $97^{\circ} 10'$ 50.7208132498199"<br>Ángulo $130^{\circ} 53'$ 36.2207368711825"<br>Ángulo $130^{\circ} 53'$ 36.2207368711825"  | j) Lado $47^{\circ} 31'$ 58.0763076154690"<br>Ángulo $26^{\circ} 31'$ 45.7929164207890"<br>Ángulo $137^{\circ} 9'$ 3.02574454003479"  |
| e) Lado $103^{\circ} 38'$ 38.4664046639227"<br>Ángulo $129^{\circ} 29'$ 9.73358214943437"<br>Ángulo $123^{\circ} 7'$ 49.0424265217152"  | k) Lado $66^{\circ} 13'$ 11.3987729465298"<br>Ángulo $160^{\circ} 6'$ 5.01843631104566"<br>Ángulo $164^{\circ} 40'$ 58.4901379615767" |
| f) Lado $97^{\circ} 47'$ 15.3765536025167"<br>Ángulo $63^{\circ} 1'$ 47.0343621232605"<br>Ángulo $151^{\circ} 41'$ 29.1349471710855"    | l) No hay solución  |

En los ejercicios sucesivos, consideraremos las siguientes posiciones geográficas:

- |   |   |
|---|---|
| ■ <b>Brasilia:</b> $15^{\circ}47'S$ , $47^{\circ}52'W$        | ■ <b>Nueva York:</b> $40^{\circ}47'N$ , $73^{\circ}58'W$  |
| ■ <b>Ciudad del Cabo:</b> $35^{\circ}55'S$ , $18^{\circ}25'E$ | ■ <b>Paris:</b> $48^{\circ}51'N$ , $2^{\circ}21'E$        |
| ■ <b>Lisboa:</b> $38^{\circ}43'N$ , $9^{\circ}8'W$            | ■ <b>Tokio:</b> $35^{\circ}42'N$ , $139^{\circ}42'E$      |
| ■ <b>Los Ángeles:</b> $34^{\circ}03'N$ , $118^{\circ}15'W$    | ■ <b>Wellington:</b> $41^{\circ}17'S$ , $174^{\circ}46'E$ |
| ■ <b>Moscú:</b> $55^{\circ}48'N$ , $37^{\circ}37'E$           |   |

11. Calcular la distancia entre las siguientes ciudades:

- |                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| a) París y Moscú.                | j) Lisboa y Brasilia.        |
| b) París y Tokio.                | k) Los Ángeles y Brasilia.   |
| c) Lisboa y Nueva York.          | l) Tokio y Wellington.       |
| d) Nueva York y Los Ángeles.     | m) Lisboa y Ciudad del Cabo. |
| e) Lisboa y París.               | n) Lisboa y Wellington.      |
| f) Lisboa y Tokio.               | ñ) Nueva York y Wellington.  |
| g) Ciudad del Cabo y Wellington. | o) Tokio y Nueva York.       |
| h) París y Ciudad del Cabo.      | p) Tokio y Los Ángeles.      |
| i) París y Wellington.           | q) Wellington y Los Ángeles. |

r) Wellington y Nueva York.

s) Wellington y Brasilia.

t) Brasilia y Tokio.

u) Brasilia y Ciudad del Cabo.

v) Wellington y París.

w) Tokio y Brasilia.

a) 2486.99619586918kms.

b) 9712.06204106132kms.

c) 5416.96063536043kms.

d) 3939.18348264545kms.

e) 1452.50052656016kms.

f) 11142.3832677462kms.

g) 11311.7942754786kms.

h) 9339.19273535851kms.

i) 18985.3924715334kms.

j) 7278.79132284669kms.

k) 9261.51649937935kms.

l) 9276.68308318467kms.

m) 8559.55554120536kms.

n) 19577.2088278943kms.

## Problemas Tema 1

1. En una esfera de radio  $1m$ , consideramos un triángulo esférico equilátero de lados  $0.5m$  y otro de lados  $1cm$ . Calcular el área y el error cometido si los consideramos triángulos planos (es decir, si tomamos el área de los triángulos planos equiláteros de lados  $0.5m$  y  $1cm$ ).

**Radio  $0.5m$**

Área triángulo esférico:  $0.111753092742335m^2$

Área triángulo plano:  $0.108253175473055m^2$ ,

Error:  $0.00349991726928009m^2$  (3.13 %)

**Radio  $1cm$**

Área triángulo esférico:  $0.433018115795214cm^2$

Área triángulo plano:  $0.433012701892219cm^2$

Error:  $5.41390299468869 * 10^{-6}cm^2$  (0.00125027170854596 %)

2. Calcular el área de un cuadrilátero de ángulos  $100^\circ$  y de ángulos  $180^\circ$  en una esfera de radio  $1m$ . Calcular la longitud de los lados de los cuadriláteros anteriores. Calcular el área de los cuadrados planos con dichas longitudes.
3. ¿Cuál es el área máxima de un polígono esférico regular (lados y ángulos iguales) de  $n$  lados en una esfera de radio  $1m$ ? Calcular el área plana determinada uniendo los vértices de un polígono regular de  $n$  lados. ¿Cuánto es la diferencia de las dos áreas? ¿A qué valor converge dicha diferencia cuando  $n \rightarrow \infty$ .
4. Calcular el área de un polígono esférico de ángulos  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $50^\circ$  en una esfera de radio  $1m$ . Razonar porqué no es posible construir dicho polígono.

**En los siguientes ejercicios, asumiremos que el radio de la tierra es 6371 kms.**

5. Un avión sale del punto  $50^{\circ}N30^{\circ}W$  y vuela por la ruta más corta hasta el punto  $50^{\circ}N30^{\circ}E$ . Calcular la posición geográfica del punto medio.

Punto medio:  $53^{\circ}59'41''N, 0^{\circ}E$

6. Un avión sale del punto  $20^{\circ}N30^{\circ}W$  y vuela por la ruta más corta hasta el punto  $80^{\circ}N30^{\circ}E$ . Calcular la posición geográfica del punto medio.

Punto medio:  $51^{\circ}58'38.72''N, 21^{\circ}39'56''W$

7. Se consideran los siguientes puntos sobre la superficie de la tierra:

A:  $60^{\circ}W, 15^{\circ}N$ .

B:  $40^{\circ}E, 15^{\circ}N$ .

C:  $40^{\circ}E, 60^{\circ}N$ .

- Plantea el triángulo esférico determinado por los puntos  $A, B, C$ .
- Calcula la longitud del lado  $\overline{AC}$ .
- Calcula los ángulos  $A$  y  $C$ .
- Calcula el área del triángulo.

Longitud del lado  $\overline{AC}$ : 9110.87340149021 kms

Ángulos  $A$  y  $C$ :  $43^{\circ}2'5.14''$  y  $106^{\circ}6'20.91''$

Área del triángulo:  $29752534.2322907km^2$

8. Se consideran los siguientes puntos sobre la superficie de la tierra:

A:  $0^{\circ}E, 0^{\circ}N$ .

B:  $40^{\circ}E, 0^{\circ}N$ .

C:  $40^{\circ}E, 60^{\circ}N$ .

Calcular las coordenadas geográficas de los vértices del triángulo polar.

9. Se consideran los siguientes puntos sobre la superficie de la tierra:

A:  $60^{\circ}W, 15^{\circ}N$ .

B:  $40^{\circ}E, 15^{\circ}N$ .

C:  $40^{\circ}E, 60^{\circ}N$ .

Calcular las coordenadas geográficas de los vértices del triángulo polar.

**En los ejercicios sucesivos, consideraremos las siguientes posiciones geográficas:**

- **Brasilia:**  $15^{\circ}47'S, 47^{\circ}52'W$
- **Ciudad del Cabo:**  $35^{\circ}55'S, 18^{\circ}25'E$
- **Lisboa:**  $38^{\circ}43'N, 9^{\circ}8'W$
- **Los Ángeles:**  $34^{\circ}03'N, 118^{\circ}15'W$
- **Moscú:**  $55^{\circ}48'N, 37^{\circ}37'E$
- **Nueva York:**  $40^{\circ}47'N, 73^{\circ}58'W$
- **Paris:**  $48^{\circ}51'N, 2^{\circ}21'E$
- **Tokio:**  $35^{\circ}42'N, 139^{\circ}42'E$
- **Wellington:**  $41^{\circ}17'S, 174^{\circ}46'E$

10. Un avión sale de Lisboa rumbo a Nueva York.

- a) Plantea un triángulo esférico tal que tenga al menos tres datos conocidos.
- b) Calcula el rumbo con el que parte el avión de Lisboa (ángulo que forma la dirección del avión con el meridiano que pasa por Lisboa).
- c) Calcula la distancia recorrida.
- d) El avión avanza a una velocidad media de 800 kms/h. Calcula su latitud y longitud tras dos horas de viaje.

11. Un avión sale de París rumbo a Nueva York.

- a) Plantea un triángulo esférico tal que tenga al menos tres datos conocidos.
- b) Calcula el rumbo con el que parte el avión de París.
- c) Calcula la distancia recorrida.
- d) El avión avanza a una velocidad media de 800 kms/h. Calcula su latitud y longitud tras dos horas de viaje.

12. Un avión sale de Los Ángeles rumbo a Tokio.

- a) Plantea un triángulo esférico tal que tenga al menos tres datos conocidos.
- b) Calcula el rumbo con el que parte el avión de Los Ángeles.
- c) Calcula la distancia recorrida.
- d) El avión avanza a una velocidad media de 800 kms/h. Calcula su latitud y longitud tras dos horas de viaje.

13. Un avión sale de Los Ángeles rumbo a Ciudad del Cabo.

- a) Plantea un triángulo esférico tal que tenga al menos tres datos conocidos.
- b) Calcula el rumbo con el que parte el avión de Los Ángeles.
- c) Calcula la distancia recorrida.
- d) El avión avanza a una velocidad media de 800 kms/h. Calcula su latitud y longitud tras dos horas de viaje.

14. Un avión va de Wellington a Los Ángeles.

- a) Plantea un triángulo esférico tal que tenga al menos tres datos conocidos.

- b) Calcula el rumbo con el que parte el avión de Wellington.
  - c) Calcula la distancia recorrida.
  - d) Calcula el punto en el que se pasa el meridiano de cambio de día.
15. Un avión va de Ciudad del Cabo a Los Ángeles.
- a) Plantea un triángulo esférico tal que tenga al menos tres datos conocidos.
  - b) Calcula el rumbo con el que llega a Los Ángeles.
  - c) Calcula la distancia recorrida.
  - d) Calcula el punto en el que se pasa el meridiano de cambio de día.
16. Se recibe una señal de posicionamiento de un satélite en Lisboa con rumbo  $40^\circ E$  y en París con rumbo  $100^\circ W$ . ¿Sobre qué punto está orbitando el satélite en ese momento?
17. Se recibe una señal de posicionamiento de un satélite en Nueva York con rumbo  $40^\circ E$  y en Moscú con rumbo  $100^\circ W$ . ¿Sobre qué punto está orbitando el satélite en ese momento?
18. Se recibe una señal de posicionamiento de un satélite en Tokio con rumbo  $100^\circ E$  y en Wellington con rumbo  $10^\circ E$ . ¿Sobre qué punto está orbitando el satélite en ese momento?
19. Se recibe una señal de posicionamiento de un satélite en Los Ángeles con rumbo  $40^\circ E$  y en Brasilia con rumbo  $10^\circ N$ . ¿Sobre qué punto está orbitando el satélite en ese momento?
20. Se recibe la señal de un barco en el pacífico en tres estaciones geodésicas, Los Ángeles, Tokio y Brasilia. Por la hora de la señal se sabe que el terremoto dista 1000kms más de Los Ángeles que de Tokio y que dista 2000kms más de Brasilia que de Tokio. ¿Dónde está el barco? (Observación: se asumirá que está resuelto cuando se obtenga una expresión de la forma  $f(A) = 0$ , para alguna variable a partir de la cual se pueda resolver el problema. En el próximo tema veremos cómo obtener dicho valor)