

Ejercicios Tema 2

1. En una primera medición, se estimó que la altura del Everest era de 8839 msnm. Mediciones posteriores han obtenido que la altura exacta es 8843 msm. ¿Cuál es el error relativo y absoluto de esa primera medición? ¿Cuántas cifras significativas tenía la medida?

Error absoluto: 4 msnm. Error relativo: 0.00045 o 0.045 %. Cifras significativas: 3.

2. Un voltímetro ofrece un error relativo del 2%. Si hemos obtenido 5.82 V, ¿es posible que el voltaje real sea de 6V? Si el voltaje real es de 5.818V, ¿cuántas cifras significativas tenía la primera medida?

No, porque en dicho caso el error relativo sería del 3%. Cifras significativas: 3.

3. Se ha obtenido que un ángulo mide 1.2 radianes, con un error relativo del 2%. ¿Con qué error relativo tenemos el seno de dicho ángulo (en %, redondeado a unidades)?

1 %

4. Aplicar 3 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $3x^3 - 2x^2 - 0.1$ en el intervalo $[0, 1]$. ¿Qué intervalo obtenemos?

$x \approx 0.625$. $[0.625, 0.75]$

5. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\sin(x)$ en el intervalo $[3, 3.5]$. ¿Qué error cometemos en dicha aproximación?

$x \approx 3.156250$. Error=0.03125

6. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\cos(x)$ en el intervalo $[-2, -1.5]$.

$x \approx -1.5937500000000000$.

7. Si aplicamos 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$, ¿tiene sentido?

No deberíamos aplicar el método en ese intervalo, pues no tenemos garantizada la existencia de un raíz.

8. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $e^x + 3x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Acotar el error cometido.

Solución aproximada: -0.3750000000000000.
Cota del error: 0.1250000000000000

9. La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por solución $x = 0.61906129$. Comenzando con el intervalo $[0, 1]$, realizar seis iteraciones por el método de bisección para encontrar la raíz aproximada. ¿Cuántas cifras decimales significativas tiene dicha aproximación? ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga un error menor que 10^{-4} .

El método de bisección da una aproximación de $x = 0.609375$, el error cometido es 0.00968628, luego tenemos 1 cifra significativa.
Para un error menor que 10^{-4} necesitamos 9 iteraciones.

10. Probar que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2} .

Tiene como mucho una raíz porque la función $f(x) = e^x + 2 * x$ es creciente. Tiene una porque $f(-2) < 0 < f(0)$.
Aproximación: -0.351562500000000

11. Probar que la función $f(x) = \cos x - 2x$ tiene un único cero. Acotarlo mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2} .

Tiene como mucho una raíz porque la función es decreciente. Tiene una porque $f(1) < 0 < f(0)$.
Aproximación: 0.449218750000000

12. Sabiendo que existe una raíz de la ecuación $x^3 + x = 6$ entre 1.55 y 1.75, ¿cuántas iteraciones son necesarias hasta obtener mediante el método de bisección un intervalo de amplitud menor o igual que 10^{-3} que contenga la raíz? Calcular todas las iteraciones necesarias.

Aproximación: 1.63398437500000. 8 iteraciones.

13. Aplicar el Método de bisección a $f(x) = x^3 - 16 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor o igual que 0.125.

Aproximación: 2.625

14. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $\cos x - \sin 2x = x$ (entre 0 y 1) con un error menor de 10^{-2} . ¿Cuántos pasos serían necesarios para que el error fuese menor que 10^{-5} ?

Aproximación: 0.332031250000000.
Con error menor que 10^{-5} , 17 pasos.

15. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $xe^x = 2$ con dos cifras significativas.

Aproximación: 0.853515625000000

16. Aplicar cinco pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$.

Aproximación: 0.56714329

17. Aplicar tres pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una solución de $x = 3 \sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$.

Aproximación: -2.14043082

18. Aplicar cuatro pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de 50 partiendo de $x_0 = 4$.

Aproximación: 3.68403149864039

19. Una aplicación de los métodos de cálculo de raíces es obtener los máximos y mínimos de una función, pues se corresponden con los ceros de la derivada. Calcular mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = -0.5$ la posición del mínimo de $f(x) = e^x + x^2/2$.

Aproximación: -0.567143290409784

20. Aplicar el Método de Newton-Raphson para calcular un cero de la función coseno partiendo de $x_0 = 1.5$, con un error menor que 10^{-3} .

Aproximación: 1.57079632679434

21. Aplicar cuatro pasos del método de Newton-Raphson para calcular aproximadamente una raíz de $x^2 - 3x + 2$, partiendo de:

- $x_0 = 0$
- $x_0 = 1.5$
- $x_0 = 3$.

- 0.999984740978103
- No se puede
- 2.00001525902190

22. Aplicar tres pasos del Método de la secante para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$.

Aproximación: 0.567102080171874

23. Aplicar tres pasos del Método de la secante para encontrar una solución de $x = \sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$

Aproximación: 0.508802044989435

24. Aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ partiendo de $x_0 = 0.4$.

Aproximación: 0.523371484876840

25. Estudiar si el método del punto fijo para la función $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ converge para condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.

Converge

26. Calcular el error cometido al aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ partiendo de $x_0 = 0.5$. Comprobar las condiciones en el intervalo $[0, 1]$.

Aproximación: 0.523544837986821

$$|F'(x)| = 1 - \cos(x) \leq 1 - \cos(1)$$

pues $1 - \cos(x)$ es creciente en $[0, 1]$, luego $K = 1 - \cos(1) = 0.459697694131860$

27. Resolver mediante eliminación gaussiana con pivote los sistemas

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

a) matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 1.0 & 0.0 & 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1.

Fila 2 \rightsquigarrow Fila 2 - Fila 1 * 0.5.

Fila 3 \rightsquigarrow Fila 3 - Fila 1 * 0.5.

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & -1.5 & 1.0 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & 2.5 & -2.0 & -1.5 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 4 y 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.5 & -2.0 & -1.5 \\ 0.0 & 3.0 & -1.5 & 1.0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2

Fila 3 \rightsquigarrow Fila 3 - Fila 2 * 1/3.

Fila 4 \rightsquigarrow Fila 4 - Fila 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.16666666667 & -2.33333333333 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 4 y 3

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.16666666667 & -2.33333333333 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 3

Fila 4 \rightsquigarrow Fila 4 + Fila 3 * 1.16666666667/5.5

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -2.33333333333 & -1.81818181818 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(0.467532467532, -0.623376623377, 0.272727272727, 0.779220779221)$$

28. Resolver los siguientes sistemas lineales utilizando eliminación gaussiana con y sin pivote:

$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 100x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_2 + 0.00001x_3 = 0 \\ 3x_1 - 100x_2 + 0.0001x_3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + 20x_2 - x_3 + 0.001x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 20x_3 - 0.1x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 100x_3 - 10x_4 = 1 \\ 2x_2 - 100x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Sin pivote. matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1

Fila 2 \rightsquigarrow Fila 2 - Fila 1 * 0.5. Fila 3 \rightsquigarrow Fila 3 - Fila 1 * 1.5

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 0.0 & -8.5 & -49.99999 & -0.5 \\ 0.0 & -95.5 & -149.9999 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2

Fila 3 \rightsquigarrow Fila 3 - Fila 2 * 11.2352941176

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 0.0 & -8.5 & -49.99999 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 411.764693529 & 4.11764705882 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(2.56564124327 \times 10^{-17}, 1.00000003029 \times 10^{-08}, 0.0100000003)$$

a) Con pivote. matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 3 y 1

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1

Fila 2 \rightsquigarrow Fila 2 - Fila 1 * 0.333333333333 Fila 3 \rightsquigarrow Fila 3 - Fila 1 * 0.666666666667

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 23.3333333333 & -2.33333333333 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 3 y 2

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \\ 0.0 & 23.3333333333 & -2.33333333333 \times 10^{-05} & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2

Fila 3 \rightsquigarrow Fila 3 - Fila 2 * 0.366492146597

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -36.6492135602 & -0.366492146597 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(0.0, 1.000000003 \times 10^{-08}, 0.0100000003)$$

29. Aplicar tres pasos del método de Jacobi a los sistemas (partiendo de (0,0,0,0))

$$a) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$a) (0.3, -0.48, 0.0, 0.0).$$

30. Aplicar tres pasos del método de Gauss-Seidel a los sistemas (partiendo de (0,0,0,0))

$$a) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$a)(0.24, -0.504, 0.0, 0.0)$$

31. Calcular un cero del sistema

$$\exp(xy) - 6xy = 0,$$

$$-\exp(y) + 6x = 0,$$

mediante tres pasos del método de Newton, comenzando en (1, 1).

$$(0.317413905042, 0.644210809738)$$

32. Calcular un cero del sistema

$$\sin(x) - y^2/\pi = 0,$$

$$\sin(xy) = 0,$$

mediante tres pasos del método de Newton, comenzando en (2.5, 1).

$$(2.69389973089, 1.16618193637)$$

Problemas Tema 1

1. Al medir los lados de un rectángulo se han obtenido 130 y 320, con un error relativo máximo del 3%. Si calculamos con estos datos el área y el perímetro, ¿qué error relativo máximo tendrán (en %, redondeado a unidades)?
2. Una aplicación de los métodos de cálculo de raíces es obtener los máximos y mínimos de una función, pues se corresponden con los ceros de la derivada. Acotar mediante el método de bisección la posición del mínimo de $f(x) = e^{(x-1)x^4}$ con un error menor que 10^{-2} . ¿Cuál sería el error cometido en el valor de dicho máximo?
3. Aplicar el método de Newton-Raphson para calcular los dos ceros y el mínimo positivos de $f(x) = e^x - 3x$ con un error menor de 10^{-2} . Probar que no hay más ceros ni raíces.
4. Encontrar una solución de $e^x - 4x - \sin(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante el método del punto fijo. Probar al menos tres transformaciones de la ecuación y estudiar la convergencia del método.
5. Halle el punto de la parábola $y = x^2$ que está más cerca del punto $(3, 1)$ con diez cifras decimales de precisión.
6. Halle el punto de la curva $y = \sin(x - \sin(x))$ que está más cerca del punto $(2.1, 0.5)$ con diez cifras decimales de precisión.
7. Halle con diez cifras decimales de precisión, el valor de x para el que es mínima la distancia vertical entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x/5 - \sin(x)$.
8. Se construye una caja sin tapadera a partir de una hoja metálica rectangular que mide 10 por 16 centímetros. ¿Cuál debe ser el lado de los cuadrados que hay que recortar en cada esquina para que el volumen de la caja sea 100 centímetros cúbicos? (con precisión 10^{-9}).
9. La curva formada por un cable colgante se llama catenaria. Supongamos que el punto más bajo de una catenaria es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación de la catenaria es $y = C \cosh(x/C) - C$. Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos $(\pm a, b)$, entonces debemos resolver la ecuación $b = C \cosh(a/C) - C$, donde la incógnita es C .

a) Pruebe que la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 10, 6)$ es

$$y = 9.1889 \cosh(x/9.1889) - 9.1889.$$

b) Halle la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 12, 5)$.

10. Si p es una raíz de multiplicidad n de una función f , entonces $f(x) = (x - p)^n q(x)$, donde $q(p) \neq 0$.
 - a) Pruebe que $h(x) = f(x)/f'(x)$ tiene una raíz simple en p .

- b) Pruebe que si aplicamos el método de Newton-Raphson para hallar la raíz simple p de $h(x)$, entonces el método queda:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x)f''(x)}$$

- c) Aplicar el método anterior para obtener la raíz de $f(x) = \sin(x^3)$ partiendo de $x_0 = 1$. Compararlo con el método usual de Newton-Raphson.
11. Discutir la convergencia del método del punto fijo para la función $F(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$, para condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.
12. Se recibe la señal de un terremoto en tres sismógrafos, Los Ángeles, Tokio y Brasilia. Por la hora de la señal se sabe que el terremoto dista 1000kms más de Los Ángeles que de Tokio y que dista 2000kms más de Brasilia que de Tokio. ¿Dónde se ha producido el terremoto?
13. Un cambio de coordenadas (lineal) en el espacio viene dado por una matriz de 3×3 A , de modo que si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un punto, entonces $A(x_1, x_2, x_3)^T$ son las coordenadas del punto transformado.
- a) Plantear las ecuaciones que han de verificar los elementos de la matriz del cambio de coordenadas, para que dicho cambio transforme los puntos $(1, 2, 1)$, $(0, 3, 2)$, $(-1, -1, 0)$ en (el triángulo) $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$.
- b) Resolver el sistema anterior mediante factorización LU .
- c) Obtener la matriz de cambio de coordenadas que transforme los puntos $(1, 2, 1)$, $(0, 3, 2)$, $(-1, -1, 0)$ en (el triángulo) $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$.
14. Se considera un disipador en forma de barra. Dividimos barra en 10 secciones de la misma longitud. Denotamos la temperatura de la sección i como x_i . Se sabe que en estado estacionario (es decir, cuando alcanza el equilibrio), se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ \dots, \\ -x_8 + 4x_9 - x_{10} = 0, \\ -x_9 + 4x_{10} = 0. \end{cases}$$

- a) Calcular la solución mediante el método de Gauss con pivote.
- b) Calcular la solución mediante dos pasos de Gauss-Seidel. ¿Cuál es el error cometido?