Ejercicios Tema 3

1. Comprobar si el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ interpola las siguiente tablas:

   a)

x	-1	0	1
y	-2	2	0

   b)

x	0	1	2
y	2	0	-2

   c)

x	-1	0	1	2
y	-2	2	0	0

2. Plantear el sistema de ecuaciones lineales que determinan los polinomios interpoladores de las siguientes tablas y resolver el sistema para obtener el polinomio interpolador (con Sage):

   a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

   b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

   c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

   Los polinómios serían:

   a) $-3.0x^2 + 0.0x + 3.0$

   b) $2.0x - 2.0$

   c) $-0.5x^3 + 1.5x^2 + x - 2.0$

3. Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

   a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

   b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

   c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

   a) $-3\,(x+1)(x-1)$

   b) $-(x-1)(x-2) + (x-1)x$

   c) $\frac{1}{6}\,(x-1)(x-2)x - (x+1)(x-1)(x-2) + \frac{1}{3}\,(x+1)(x-1)x$

4. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas mediante el método de Newton:

   a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

   b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

   c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

   a) $0 + 3(x+1) - 3\,(x+1)x$

   b) $-2 + 2\,x$

   c) $-1 - (x+1) + \frac{3}{2}\,(x+1)x - \frac{1}{2}\,(x+1)(x-1)x$

5. Sea la función $f(x) = e^x$ y los valores siguientes: $f(0) = 1$, $f(0.5) = 1.64872$, $f(1) = 2.71828$ y $f(2) = 7.38906$, efectuar los siguientes cálculos:

a) Aproximar $f(0.25)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.

b) Aproximar $f(0.75)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.

c) Aproximar $f(0.25)$ y $f(0.75)$ utilizando el polinomio de interpolación de los puntos $(0, f(0))$, $(0.5, f(0.5))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.

6. Sea la función $f(x) = \cos(x)$ y los valores siguientes: $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$, $f(\pi) = -1$ y $f(2\pi) = 1$, efectuar los siguientes cálculos:

   a) Aproximar $f(1)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.

   b) Aproximar $f(2)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.

   c) Aproximar $f(1)$ y $f(2)$ utilizando el polinomio de interpolación de los puntos $(0, f(0))$, $(0.5, f(0.5))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.

7. Obtener los splines cúbicos naturales que interpolan las siguientes tablas (plantear el sistema de ecuaciones – resolverlo con Sage):

a)

x	-1	0	1
y	0	3	0

b)

x	0	1	2
y	-2	0	2

c)

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

a)

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\,x^3 - \frac{9}{2}\,x^2 + 3 & \text{en } (-1, 0) \\ \frac{3}{2}\,x^3 - \frac{9}{2}\,x^2 + 3 & \text{en } (0, 1) \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2\,x - 2 & \text{en } (0, 1) \\ 2\,x - 2 & \text{en } (1, 2) \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\,x^3 + \frac{12}{5}\,x^2 + \frac{3}{5}\,x - 2 & \text{en } (-1, 0) \\ -x^3 + \frac{12}{5}\,x^2 + \frac{3}{5}\,x - 2 & \text{en } (0, 1) \\ \frac{1}{5}\,x^3 - \frac{6}{5}\,x^2 + \frac{21}{5}\,x - \frac{16}{5} & \text{en } (1, 2) \end{cases}$$

8. Obtener la curva polinomial que interpola los siguientes puntos, considerados en los momentos $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$:

a)

x	-1	0	-1
y	0	3	0

b)

x	0	-1	2
y	-2	0	2

c)

x	-1	0	1
y	-1	-2	0

d)

x	-1	0	-1
y	1	1	1

e)

x	0	1	-1
y	2	0	2

f)

x	-1	0	-1
y	1	2	-3

9.

10. Calcular mediante el método del trapecio simple una aproximación de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$	*c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$	*e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$
b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$	*d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$	*f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

a) 1.20710678118655	*c*) 1.33333333333333	*e*) 1.35914091422952
b) 0.279411764705882	*d*) 0.785398163397448	*f*) 55.5981500331442

11. Calcular mediante el método de Simpson una aproximación de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$	*c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$	*e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$
b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$	*d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$	*f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

a) 1.10947570824873	*c*) 1.38725348602651	*e*) 1.00262072830988
b) 0.203102890640792	*d*) 1.00227987749221	*f*) 22.1570924489935

12. Calcular mediante el método del trapecio compuesto con tres intervalos una aproximación de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$	*c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$	*e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$
b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$	*d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$	*f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

a) 1.12133567357593	*c*) 1.39312100781485	*e*) 1.04094480554267
b) 0.211499575326302	*d*) 0.977048616656853	*f*) 23.5169280698955

13. Calcular mediante cuadratura apaptativa una aproximación con error menor de 10^{-1} de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$	*c*) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$	*e*) $\int_0^1 xe^x\,dx$
b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$	*d*) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$	*f*) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

a) 1.11148906719824	*c*) 1.40638733861507	*e*) 1.00000560172911
b) 0.203031634090378	*d*) 0.999991565472993	*f*) 16.4537461252335

Problemas

1. Probar que los polinomios $p(x) = -x^2 + 3x$ y $q(x) = -x^3 + 3x^2$ interpolan los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$. ¿Por qué no tenemos un único polinomio interpolador en este caso?

2. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Acotar el error cometido a tomar $f(0.5)$ como el valor del polinomio interpolador de f en los puntos $x = 0, 1, 2$.

3. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Acotar el error cometido a tomar $f(0.5)$ como el valor del polinomio interpolador de f en los puntos $x = -1, 0, 1, 2$.

4. Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$. Acotar el error cometido a tomar $f(\pi/5)$ como el valor del polinomio interpolador de f en los puntos $x = 0, \pi/4, \pi/2$.

5. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Tomamos $x_0 = 0$. ¿Cuál es el mayor valor de x_1 que podemos considerar para que la interpolación lineal de f en x_0, x_1 tenga un error menor de 10^2? (es decir, $|f(x) - p(x)| < 10^-2$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, donde p es el polinomio lineal que interpola f en x_0, x_1).

6. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Tomamos $x_0 = 1$. ¿Cuál es el mayor valor de x_1 que podemos considerar para que la interpolación lineal de f en x_0, x_1 tenga un error menor de 10^2? (es decir, $|f(x) - p(x)| < 10^-2$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, donde p es el polinomio lineal que interpola f en x_0, x_1).

7. Consideremos la función $f(x) = e^{-x}$. Tomamos $x_0 = 1$. ¿Cuál es el mayor valor de x_1 que podemos considerar para que la interpolación lineal de f en x_0, x_1 tenga un error menor de 10^2? (es decir, $|f(x) - p(x)| < 10^-2$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, donde p es el polinomio lineal que interpola f en x_0, x_1).

8. El polinomio
$$p(x) = 1 + (x + 1) + (x + 1)x + (x + 1)x(x - 1),$$
es el polinomio interpolador de los puntos $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 16)$. Calcular el polinomio interpolador de los puntos $(-2, 8)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 16)$, sin recalcular todo el polinomio de interpolación (pista: reconstruir la tabla de diferencias divididas y añadir el nuevo punto).

9. El polinomio
$$p(x) = 1 - (x + 1) + (x + 1)x - (x + 1)x(x - 1),$$
es el polinomio interpolador de los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -14)$. Calcular el polinomio interpolador de los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -14)$, $(3, 9)$, sin recalcular todo el polinomio de interpolación (pista: reconstruir la tabla de diferencias divididas y añadir el nuevo punto como primer punto).

10. Mediante una interpolación polinomial se ha obtenido la curva $(t^2, -t^2 + 2t)$ para $t \in (0, 1)$. Determinar los nodos y el punto de control de una curva de Bezier con la misma ecuación.

11. Mediante una interpolación polinomial se ha obtenido la curva $(t^2, -t^2 + 2t)$ para $t \in (0, 1)$. Determinar los nodos y el punto de control de una curva de Bezier con la misma ecuación.

12. Mediante una interpolación polinomial se ha obtenido la curva $(2t, -2t^2 + 2t)$ para $t \in (0, 1)$. Determinar los nodos y el punto de control de una curva de Bezier con la misma ecuación.

13. Mediante una interpolación polinomial se ha obtenido la curva $(4t^3 - 3t^2 + 3t, -3t^2 + 3t)$ para $t \in (0, 1)$. Determinar los nodos y los puntos de control de una curva de Bezier con la misma ecuación.