Ejercicios Tema 4

1. Resolver las siguientes ecuaciones autónomas:

   a) $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$

   b) $x'(t)/x(t) = 2$

   c) $x'(t) = x(t) - \frac{1}{x(t)}$

   d) $x(t)x'(t) = x(t) + 1$

   > *a)* $x(t) = \pm\sqrt{2C + 2t}$
   >
   > *b)* $x(t) = \pm e^{2t+C}$
   >
   > *c)* $x(t) = \pm\sqrt{e^{2C+2t} + 1}$
   >
   > *d)* $x(t) = -\frac{e^{C+t}}{e^{C+t} \pm 1}$

2. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$, $x(0) = 1$

   b) $x'(t)/x(t) = 2$, $x(0) = -1$

   c) $x'(t) = x(t) - \frac{1}{x(t)}$, $x(0) = 3/2$

   d) $x(t)x'(t) = x(t) + 1$, $x(1) = 2$

   > *a)* $x(t) = \sqrt{1 + 2t}$
   >
   > *b)* $x(t) = -e^{2t}$
   >
   > *c)* $x(t) = \sqrt{e^{\log(5/4)+2t} + 1}$
   >
   > *d)* $x(t) = -\frac{e^{\log(2/3)-1+t}}{e^{\log(2/3)-1+t} - 1}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones de variables separadas:

   a) $x'(t) = \left(t^3 - t + 1\right)$

   b) $x'(t)/x(t) = \sin t \cos t$

   c) $x'(t) = e^{-t}x(t) + e^{t}x(t)$

   d) $(t^2 + 1)x'(t) = tx(t)$

   > *a)* $x(t) = t^4/4 - t^2/2 + t + C$
   >
   > *b)* $x(t) = \pm e^{-cos(t)^2/2+C}$
   >
   > *c)* $x(t) = \pm e^{e^t - e^{-t} + C}$
   >
   > *d)* $x(t) = \pm e^{\log(t^2+1)/2+C}$

4. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $x'(t) = \left(t^3 - t + 1\right) x(t)$, $x(0) = 1$

b) $x'(t)/x(t) = \sin t \cos t$, $x(0) = -1$

c) $x'(t) = e^{-t}x(t) + e^{t}x(t)$, $x(0) = 2$

d) $(t^2+1)x'(t) = tx(t)$, $x(0) = 0$

a) $x(t) = t^4/4 - t^2/2 + t + 1$

b) $x(t) = -e^{-cos(t)^2/2+1/2}$

c) $x(t) = e^{e^t - e^{-t} + \log(2)}$

d) $x(t) = 0$

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

   a) $x'(t) = \left(t^2+t+1\right) x(t)$

   b) $x'(t)/x(t) = \sin t + \cos t$

   c) $x'(t) = x(t) + e^{t}x(t)$

   d) $(t^2-1)x'(t) = tx(t)$

a) $x(t) = \pm e^{t^3/4+t^2/2+t+C}$

b) $x(t) = \pm e^{-\cos\, t + \sin\, t + C}$

c) $x(t) = \pm e^{t+e^t+C}$

d) $x(t) = \pm \frac{t^2-t+2C}{2}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

   a) $x'(t) = -x(t) + 2$

   b) $x'(t) = -x(t)/t + t^2 + 1$

   c) $x'(t) = x(t) + 1 + t$

   d) $x'(t) = \sin(t)x(t)/cos(t) + sin(t)$

a) $x(t) = \left(C + 2\, e^t - 2\right)e^{-t}$

b) $x(t) = \frac{1}{4}\left(t^4 + 2\, t^2 + 4\, C\right)e^{-\log(t)}$

c) $x(t) = -\left((t+2)e^{-t} - C - 2\right)e^{t}$

d) $x(t) = -\frac{\cos(t)^2 - 2\, C - 1}{2\, \cos(t)}$

7. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $x'(t) = -x(t) + 2, \quad x(0) = 0$

   b) $x'(t) = -x(t)/t + t^2 + 1, \quad x(1) = 1$

   c) $x'(t) = x(t) + 1 + t, \quad x(-1) = 0$

   d) $x'(t) = \sin(t)x(t)/cos(t) + sin(t), \quad x(-\pi) = 1$

> a) $x(t) = \left(2\,e^{t} - 2\right)e^{-t}$
> b) $x(t) = \frac{1}{4}\left(t^{4} + 2\,t^{2} + 1\right)e^{-\log(t)}$
> c) $x(t) = -\left((t+2)e^{-t} - e\right)e^{t}$
> d) $x(t) = -\frac{\cos(t)^{2}-3}{2\,\cos(t)}$

8. Obtener mediante tres pasos del método de Euler el valor en $t = 2$ de la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $x'(t) = x(t) - \frac{t}{x(t)}$, $x(0) = 1/2$
   b) $x'(t) = e^{t} + e^{t}/x(t)$, $x(1) = 4$.
   c) $x'(t)/x(t) = \sin t \cos t$, $x(0) = -1$

> a) 0.386964886964887
> b) 8.67402547722230
> c) -1.52578579789785

9. Obtener mediante tres pasos del método de Euler modificado el valor en $t = 2$ de la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $x'(t) = x(t) - \frac{t}{x(t)}$, $x(0) = 1/2$
   b) $x'(t) = e^{t} + e^{t}/x(t)$, $x(1) = 4$.
   c) $x'(t)/x(t) = \sin t \cos t$, $x(0) = -1$

> a) 3.07853031802742
> b) 9.45842009599568
> c) -1.36599672817785

10. Obtener mediante tres pasos del método de Runge-Kutta el valor en $t = 2$ de la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $x'(t) = x(t) - \frac{t}{x(t)}$, $x(0) = 1/2$
   b) $x'(t) = e^{t} + e^{t}/x(t)$, $x(1) = 4$.
   c) $x'(t)/x(t) = \sin t \cos t$, $x(0) = -1$

> a) 0.292861252810379
> b) 9.40353393652939
> c) -1.51198226781171

11. Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $x''(t) - x(t) = 0$

b) $6x''(t) - 7x'(t) + x(t) = 0$
c) $x''(t) - 3x'(t) + x(t) = 0$
d) $3x''(t) + 6x'(t) + 2x(t) = 0$
e) $x''(t) + x'(t) + 2x(t) = 0$
f) $4x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0$

a) $x(t) = K_2 e^{-t} + K_1 e^{t}$
b) $x(t) = K_2 e^{t/6} + K_1 e^{t}$
c) $x(t) = K_1 e^{t(3+\sqrt{5})/2} + K_2 e^{t(3-\sqrt{5})/2}$
d) $x(t) = K_2 e^{t(-3-\sqrt{3})/3} + K_1 e^{t(-3+\sqrt{3})/3}$
e) $x(t) = \left(K_2 \cos(\sqrt{7}t/2) + K_1 \sin(\sqrt{7}t/2)\right) e^{-t/2}$
f) $x(t) = (K_2 t + K_1)\, e^{-t/2}$

12. Resolver los siguientes problemas de valor inicial

a) $x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 0$, $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$.
b) $2x''(t) + x'(t) - 10x(t) = 0$, $x(0) = 5$, $x'(0) = 5$.
c) $5x''(t) + 5x'(t) - x(t) = 0$, $x(-1) = 0$, $x'(-1) = 2$.
d) $x''(t) - 6x'(t) + x(t) = 0$, $x(-2) = 1$, $x'(-2) = 0$.
e) $x''(t) + x'(t) + 2x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
f) $4x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$.

a) $x(t) = \frac{2}{5}\, e^{(4\,t-4)} + \frac{8}{5}\, e^{(-t+1)}$
b) $x(t) = \frac{35}{9}\, e^{(2\,t)} + \frac{10}{9}\, e^{\left(-\frac{5}{2}\,t\right)}$
c) $x(t) = -\frac{2}{3}\,\sqrt{5} e^{\left(-\frac{1}{10}\,t\left(3\,\sqrt{5}+5\right)-\frac{3}{10}\,\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{3}\,\sqrt{5} e^{\left(\frac{1}{10}\,t\left(3\,\sqrt{5}-5\right)+\frac{3}{10}\,\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)}$
d) $x(t) = \frac{1}{8}\,\sqrt{2}\left(2\,\sqrt{2}+3\right) e^{\left(-t\left(2\,\sqrt{2}-3\right)-4\,\sqrt{2}+6\right)} - \frac{1}{8}\,\left(3\,\sqrt{2}-4\right) e^{\left(t\left(2\,\sqrt{2}+3\right)+4\,\sqrt{2}+6\right)}$
e) $x(t) = \frac{1}{7}\,\left(\sqrt{7}\sin\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{7}t\right) + 7\,\cos\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{7}t\right)\right) e^{\left(-\frac{1}{2}\,t\right)}$
f) $x(t) = -\frac{1}{2}\,(t\sqrt{e} - 3\,\sqrt{e}) e^{\left(-\frac{1}{2}\,t\right)}$

Problemas

1. (Robert L. Borrelli- Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632)

   Se sabe que ciertos elementos o sus isótopos son inestables, desintegrándose en isótopos de otros elementos mediante emisión de partículas α, partículas β o fotones. Se dice que tales elementos son radiactivos. Por ejemplo, un átomo de radio se desintegra en un átomo de radon, emitiendo una partícula α en el proceso, ${}^{226}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Rn}$. La desintegración de un único núcleo radiactivo es un proceso alatorio, y el tiempo exacto de desintegración no puede ser determinado con exactitud. Sin embargo pueden hacerse afirmaciones concretas en el proceso de desintegración de un gran número de átomos radiactivos.

La cuestión es:

¿Cuántos núcleos hay en una muestra de un elemento radiactivo en el instante de tiempo t?

Nuestro sistema es la colección de núcleos radiactivos en la muestra, y lo único que nos interesa medir es el número de núcleos radiactivos en el tiempo t. No es obvio, sin embargo, cuál es la ley de desintegración. Hay numerosas evidencias experimentales que sugieren que la siguiente ley es cierta:

En una muestra que contiene un gran número de núcleos radiactivos, la disminución del número de núcleos radiactivos en un intervalo de tiempo es directamente proporcional a la longitud del intervalo de tiempo y al número de núcleos presente en el tiempo inicial.

Si denotamos por $x(t)$ el número de núcleos radiactivos en el tiempo t y el intervalo de tiempo por Δt, la ley se traduce en

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

donde a es la constante estrictamente positiva de proporcionalidad.

El modelo matemático anterior para la ley nos ayuda a darle su justo valor. Por una parte $x(t)$ y $x(t+\Delta t)$ deben ser enteros, pero $-a\Delta t$ puede no ser un entero. Si queremos mantener la ley debemos idealizar el fenómeno real suponiendo que $x(t)$ es una cantidad continua. Por ejemplo, midiendo $x(t)$ en gramos. Incluso siendo $x(t)$ continuo la ley pudiera no ser cierta para valores de t grande, ya que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Además la ley no tiene sentido si Δt es tan pequeño que ningún núcleo se desintegra en el intervalo de tiempo Δt. El fallo de la ley para intervalo grandes de tiempo puede ser ignorado, porque sólo estamos interesados en un comportamiento local (en el tiempo). Las dificultades con t pequeño son más preocupantes. Sólo podemos esperar que el procedimiento matemático que se presenta a continuación nos conduzca a un modelo matemático en la que la $x(t)$ teórica sea razonablemente próxima a la experimental.

Si dividimos ambos lados de

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

por Δt y tomamos límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$x'(t) = -ax(t).$$

Así que podemos decir:

La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible.

a) Resolver la ecuación diferencial.

b) La vida media del elemento radiactivo, $t_{1/2}$, es el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de los núcleos radiactivos se desintegre.

Calcule la constante a conociendo la vida media.

c) La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Supóngase que en 25 años el 1,1 % de una cierta cantidad de radio se ha desintegrado. ¿Cuál es la vida media del radio?

d) Si la vida media de una sustancia radiactiva es 1000 años, ¿qué fracción de ella permanece después de 100 años?

e) Con el tiempo medido en años, el valor de a en $x'(t) = -ay$ para el cobalto–60 es aproximadamente 0.13. Estime la vida media del cobalto–60.

2. **Determinación de la edad mediante el ^{14}**C (Robert L. Borrelli- Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632).

   Las células vivas absorben carbono directa o indirectamente del dióxido de carbono en el aire. Algunos de los átomos del carbono en este CO_2 son la forma radioactiva: ^{14}C, en lugar del común ^{12}C, producido por las colisiones de los rayos cósmicos (neutrones) con el nitrógeno de la atmosfera. Los núcleos de ^{14}C se desintegran convirtiéndose en núcleos de nitrógeno y emitiendo partículas β. Entonces todos los seres vivos, o seres que estuvieron vivos contienen algunos núcleos de carbono radiactivo, ^{14}C. En los años 1960, Willard Libby demostró que una medición cuidadosa de la tasa de desintegración del ^{14}C en una muestra de tejido muerto puede usarse para determinar el número de años desde que murió.

   Vamos a considerar un problema específico para concentrar nuestra atención:

   Se utilizó un contador Geiger para medir la tasa de desintegración de ^{14}C en fragmentos de carbón vegetal encontrados en la gruta de Lascaux en Francia, donde hay pinturas prehistóricas. El contador registró 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono, mientras que para tejido vivo el número de desintegraciones, medido en 1950, fue de 13,5 por minuto y gramo de carbón. ¿Hace cuántos años se formó el carbón vegetal y, presumiblemente, fueron dibujadas las pinturas?

   En cualquier organismo vivo la razón del ^{14}C al ^{12}C es la misma que en el aire. Si la razón en el aire es constante en el tiempo y en el lugar, entonces también lo será en un tejido vivo. Después de la muerte del organismo, la absorción de CO_2 se detiene y sólo sigue la desintegración radioactiva. La vida media del ^{14}C es de 5568 ± 30 años (valor internacionalmente aceptado desde 1968).

   Sea $x(t)$ la cantidad de ^{14}C por gramo de carbón en el tiempo t (medido en años) en la muestra de carbón vegetal. Sea $t = 0$ el tiempo actual y supongase que $T < 0$ es el tiempo en el que el tejido de la muestra murió. Entonces $x(t) \equiv x_T$ para todo $t \leq T$. Para $t > T$ los núcleos de ^{14}C se desintegran siguiendo la ecuación diferencial

   $$x'(t) = -ax(t),$$

   donde la constante a se calcula a través de la vida media del ^{14}C.

   a) Sabemos que el carbón de la muestra presenta 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón y que en un tejido vivo hay 13,5 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón. Sabiendo que el número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional a la velocidad de desintegración $x'(t)$, calcular T.

   b) Un arqueólogo ha encontrado una concha que contiene el 60 % del ^{14}C de una concha viva. ¿Cuál es su edad?

   c) La velocidad de desintegración del elemento radiactivo radio es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Se supone que en el instante de tiempo t_0 hay R_0 gramos de radio. Se desea saber cuál es la cantidad de radio en cada instante de tiempo.

Calentamiento y enfriamiento

3. Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a temperatura T se coloca en un medio que se encuentra a la temperatura constante T_M, entonces la razón de cambio de T es proporcional a la diferencia de temperatura $T - T_M$. Esto da lugar a la ED

   $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M), \qquad k < 0.$$

Resuelva la ED para T.

Un termómetro que marca 100 grados se coloca en un medio que se encuentra a una temperatura constante de 70 grados. Al cabo de 6 min., el termómetro marca 80 grados. ¿Cuál es la lectura al cabo de 20 min.?

Secreción de hormonas

4. La secreción de hormonas suele ser una actividad periódica. Si una hormona es segregada en un ciclo de 24 hr, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar por medio del problema de valor inicial

$$x' = \alpha - \beta \cos \frac{\pi t}{12} - kx, \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(t)$ es la cantidad de la hormona contenida en la sangre en el instante t, α es la velocidad de secreción media, β la cantidad de variación en la secreción, y k una constante positiva que representa la velocidad a la cual el cuerpo elimina la hormona de la sangre. Si $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ y $x_0 = 10$, encuentre $x(t)$.

Mezclas

5. Considere un tanque que contiene 1000 l de agua, dentro del cual una solución salada de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 l/min. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de 6 l/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 10 g/l, determine cuándo será de 5 g/l la concentración de sal en el tanque.

6. En el problema anterior, supóngase que la salmuera sale del tanque a razón de 5 l/m en lugar de 6 l/m, con todas las demás condiciones iguales. Determine la concentración de sal en el tanque en función del tiempo.

7. Una solución de salmuera fluye a razón constante de 8 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 l de solución de salmuera en la cual están disueltos 5 Kg de sal. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 0,5 Kg/l, determine la cantidad de sal presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el tanque el valor de $0,2$ Kg/l?

8. Una solución de salmuera fluye a razón constante de 4 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 l de agua. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior a razón de 3 l/m. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de $0,2$ Kg/l, determine la cantidad de sal contenida en el tanque al cabo de t minutos. ¿En qué momento la concentración de sal contenida en el tanque será de $0,1$ Kg/l ?

9. Una solución de ácido nítrico fluye a razón constante de 6 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 l de una solución de ácido nítrico al 0,5 %. La solución contenida en el tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior del mismo a razón de 8 l/m. Si la solución que entra en el tanque es de 20 % de ácido nítrico, determine la cantidad de ácido nítrico presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿En qué momento el porcentaje de ácido nítrico contenido en el tanque será del 10 % ?

10. Una piscina cuyo volumen es de 45.000 l contiene agua con el 0.01 % de cloro. Empezando en $t = 0$ desde la central depuradora se bombea agua, que contiene 0.001 % de cloro, hacia el interior de la piscina a razón de 25 l/m. El agua de la piscina fluye al exterior a la misma velocidad.

¿Cuál es el porcentaje de cloro en la piscina al cabo de una hora? ¿Cuándo tendrá el agua de la piscina 0.002 % de cloro?

Poblaciones

11. Sea $p(t)$ la población en el tiempo t. Si bien la población es siempre un número entero, normalmente es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $p(t)$ es una función continua.

    Considérese una población de bacterias que se reproducen mediante división celular simple, de modo que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Esta hipótesis es consistente con las observaciones de crecimiento de bacterias. Mientras exista espacio suficiente y un buen suministro de alimento para las bacterias, se puede suponer también que la tasa de mortalidad es cero. (Recuerde que en la división celular la célula madre no muere, sino que se convierte en dos nuevas células). Establezca un modelo matemático para la población de bacterias que siga las hipótesis anteriores.

12. En el estudio de poblaciones humanas, la premisa de que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño parece razonable. Sin embargo la hipótesis de una tasa de mortalidad nula es, desde luego, errónea. Suponiendo que las personas fallecen por causas naturales, se podria esperar que la tasa de mortalidad fuera también proporcional al tamaño de la población.

    Establezca un modelo matemático para la población teniendo en cuenta los factores anteriores. Resuelva la ED del modelo.

13. ¿Qué se puede decir de las muertes prematuras debidas a desnutrición, servicios médicos inadecuados, enfermedades contagiosas, crimenes violentos, etc.? Puesto que estos factores implican la competencia dentro de la población, se puede suponer que la tasa de mortalidad debida a estos factores es proporcional al número de interacciones bipartitas.

    Establezca un modelo matemático para la población donde se tenga en cuenta la tasa de mortalidad debida a competencias entre la misma especie. Resuelva la ED del modelo.

14. La acuicultura trata del cultivo de plantas y animales acuáticos. En el ejemplo que aqui se considera se cria un lote de tencas en una charca. Se desea determinar el momento óptimo para capturar a los peces de modo que el coste por kilo sea minimo.

    Una ED que describe el crecimiento de los peces es

    $$\frac{dW}{dt} = KW^{\alpha}, \tag{*}$$

    donde $W(t)$ es el peso del pez en el tiempo t, y K y α son constantes de crecimiento determinadas empiricamente. Es una suposición común modelar la tasa de crecimiento o tasa metabólica por medio de un término proporcional a W^{α}. Los biólogos llaman ecuación alométrica a la ecuación anterior. Dicha ecuación puede apoyarse mediante argumentos razonables tales como el de una tasa de crecimiento dependiente del área de la superficie del intestino (la cual varia en forma proporcional a $W^{2/3}$), o bien dependiente del volumen del animal (el cual varia en forma proporcional a W).

    (a) Resuelva la ED (*) cuando $\alpha \neq 1$.

    (b) La solución obtenida en la parte (a) no está acotada, pero en la práctica existe un cierto peso máximo para el pez, W_M. Esta cota superior puede incluirse en la ED que describe el crecimiento introduciendo una variable adimensional, que puede variar entre 0 y 1 y que contiene un parámetro adimensional μ que se determina empiricamente. Es decir se supone que

    $$\frac{dW}{dt} = KW^{\alpha}S, \tag{**}$$

donde $S = 1 - (W/W_M)^\mu$.

Resuelva la ED (**) cuando $K = 12$, $\alpha = 2/3$, $\mu = 1/3$, $W_M = 5$ Kg y $W(0) = 0{,}1$ Kg. Las constantes están dadas para t medido en meses.

(c) La ED que describe el costo total en pesetas $C(t)$ para criar una tenca durante t meses tiene un término constante K_1 que especifica el costo mensual (debido a gastos tales como intereses, depreciación y mano de obra), y una segunda constante K_2 que multiplica a la tasa de crecimiento (debido a que la cantidad de alimento consumido por el pez es aproximadamente proporcional a la tasa de crecimiento). Esto es

$$\frac{dC}{dt} = K_1 + K_2 \frac{dW}{dt}. \qquad (***)$$

Resuelva la ED (***) cuando $K_1 = 0{,}5$, $K_2 = 0{,}1$, $C(0) = 100$ pesetas y $W(t)$ es como se determinó en la parte (b).

(d) Trace la gráfica de la curva obtenida en la parte (b), que representa el peso del pez en función del tiempo. A continuación trace la gráfica de la curva obtenida en la parte (c), que representa el costo total de la crianza del pez en función del tiempo.

(e) Para determinar el tiempo óptimo para capturar el pez, trace la gráfica del cociente $C(t)/W(t)$. Dicho cociente representa el coste total por Kg en función del tiempo. Cuando este cociente alcanza su minimo —es decir, cuando el coste total por Kg es el más bajo posible—, es el momento óptimo para capturar el pez. Determine dicho momento óptimo redondeado al mes más cercano.

Circuitos eléctricos simples

15. Se deducen las ED lineales que rigen el flujo de la electricidad en el circuito simple que se muestra en la figura que sigue.

Este circuito consta de cuatro elementos, cuya acción se puede comprender con facilidad, sin necesidad de tener conocimientos especiales de electricidad.

A. Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E –una pila o un generador– impulsa una carga eléctrica y produce una corriente I. Dependiendo de la naturaleza de la fuente E puede ser una constante o función del tiempo.

B. Un resistor de resistencia R que se opone a la corriente, reduce la fuerza electromotriz en una magnitud $E_R = RI$. Esta ecuación se conoce como ley de Ohm.

C. Un inductor de inductancia L, que se opone a cualquier cambio de la corriente, produciendo una disminución de la fem en una magnitud

$$E_L = L\frac{dI}{dt}.$$

D. Un condensador de capacitancia C, almacena una carga Q. La carga acumulada por el condensador se opone a la entrada de una carga adicional y la disminución de la fem que se produce en este caso es

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Además, puesto que la corriente es la rapidez de flujo de la carga y, en consecuencia, el indice al que la carga aumenta en el condensador, se tiene

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Estos elementos del circuito actúan de acuerdo a la ley de Kirchhoff, que indica que la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es igual a cero. Es decir $E - E_R - E_L - E_C = 0$ o

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0,$$

que se puede escribir como

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E. \qquad (0.1)$$

Dependiendo de las circunstancias, se puede considerar ya sea I o Q como la variable dependiente. En el primer caso se elimina Q, derivando (0.1) con respecto de t y sustituyendo dQ/dt por I:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

En el segundo caso se sustituye I por dQ/dt:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E.$$

Cuando no hay condensador se obtiene la ED de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Resuélvala.

Problemas geométricos (determinar la ecuación, no resolverla)

16. Halle la curva cuyas tangentes forman con los ejes coordenados un triángulo de área constante $2a^2$.

17. Halle las curvas para las que el segmento de tangente comprendido entre los ejes coordenados tiene longitud constante a.

18. Determine las curvas tales que el segmento de tangente comprendido entre los ejes coordenados se divide por la mitad en los puntos de contacto.

19. Halle las curvas que verifican que la distancia de la perpendicular desde el origen de coordenadas a la tangente a la curva es igual a la abcisa del punto de contacto.

20. Una trayectoria ortogonal a una familia de curvas es una curva que corta todas las curvas de la familia en ángulo recto.

    Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de elipses $t + mxx' = 0$.

Problemas mecánicos

21. Una máquina quita la nieve uniformemente, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la cantidad de nieve. Se supone que nieva con regularidad, que a las 12 a.m. comienza a funcionar la máquina, que recorre en la primera hora 2Km. y en la segunda hora 1Km. ¿A qué hora comenzó a nevar?

22. Un objeto cae por el aire hacia la Tierra. Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto son la gravedad y la resistencia del aire (que se supone proporcional a la velocidad), determine la velocidad en función del tiempo.

23. Encuentre la forma asumida por una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga con su propio peso.

24. Se arrastra un punto P a lo largo del plano tx por medio de una cuerda PT de longitud a. Si T parte del origen y se desplaza a lo largo del eje positivo x y si P parte de $(a, 0)$, ¿Cuál será la trayectoria de P? Esta curva se llama *tractiz* (del latin tractum, que significa tirar).

25. El eje x y la recta $X = c$ son las orillas de un rio cuya corriente tiene una velocidad uniforme a, en la dirección negativa del eje x. Una barca entra en el rio en el punto $(c, 0)$ y va directamente hacia el origen con una velocidad b en relación al agua. ¿Cuál es la trayectoria de la barca?