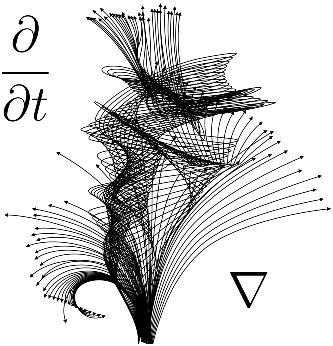
Ecuaciones diferenciales

José Luis Bravo Trinidad

21 de noviembre de 2016

Introducción a las ecuaciones diferenciales

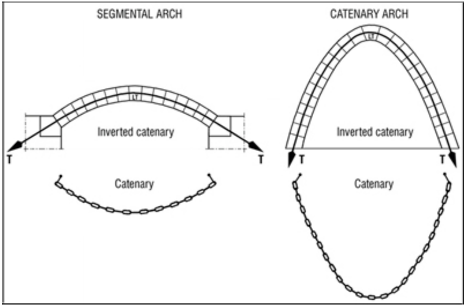


Las primeras ecuaciones diferenciales surgen al tratar de resolver ciertos problemas de Mecánica y Geometría. Hoy en día, constituyen el modelo matemático de numerosos problemas físicos, y se han convertido en una herramienta fundamental para el estudio y desarrollo de diferentes aspectos de la teconología.

La Catenaria es la curva que describe una cadena suspendida por sus extremos, sometida a un campo gravitatorio uniforme, con masa distribuida uniformemente. La ecuación diferencial correspondiente a la catenaria es

$$x''(t) = \frac{\lambda}{T_H}\sqrt{1 + x'(t)^2}$$

donde λ es el peso por unidad de longitud y T_H la tensión horizontal que aparecerá en los extremos del cable.



Planteamiento de una ecuación diferencial

Dada cierta función f, queremos obtener la función $x(t)$ tal que

$$f(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n)}(t)) = 0$$

t es la **variable independiente**

$x(t)$ es la **variable dependiente** o función incógnita.

n es el **orden** de la ecuación.

La ecuación es **autónoma** si $f(x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n)}(t)) = 0$.

Ejemplo: Modelo de Malthus (crecimiento exponencial)

Este modelo fue propuesto en 1798 por el economista y demógrafo Thomas Malthus. Suele ser útil como modelo estimativo para intervalos de tiempo no muy grandes. Se ha usado para el estudio de colonias de bacterias, poblaciones de pequeños mamíferos e incluso para población humana.

Consideremos que $p(t)$ es el tamaño de cierta población en el instante t. Según el modelo de Malthus, el crecimiento de la población seguiría un modelo de cierta tasa de crecimiento constante c (diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad) y proporcional al tamaño de la población.

$$p'(t) = cp(t)$$

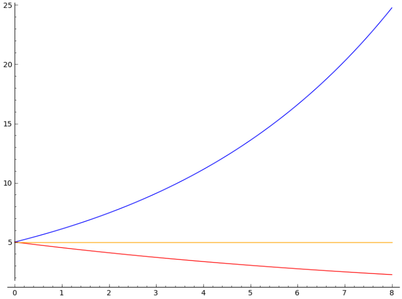
La resolución de esta ecuación son las curvas de la forma

$$p(t) = Ke^{ct}, K > 0$$

donde K es el tamaño de la población en $t = 0$.

Ejemplo: Modelo de Malthus

Se muestran las soluciones del modelo de Malthus para $K = 5$. $c = 0{,}2$ (azul), $c = -0{,}1$ (rojo), $c = 0$ (naranja).

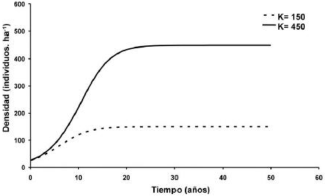


Ejemplo: Modelo Logístico

El Modelo de Malthus implica que multitud de factores no sean tenidos en cuenta, de hecho es un modelo extremadamente simple. Una sustancial mejora en las suposiciones del modelo de Malthus viene dada por el Modelo Logístico, propuesto por el matemático belga P. F. Verhulst en 1836.

$$p'(t) = c\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right)$$

donde c es la tasa de crecimiento (con recursos ilimitados) y K la capacidad del sistema (nº máximo de individuos que admite)



Segunda Ley de Newton

Consideremos una masa puntual m que se mueve a lo largo del eje OX y ocupa la posición $x(t)$ en el instante t. El movimiento de la partícula lo produce una fuerza F que depende:

- De la posición x
- Del instante t
- De la velocidad $v = \dfrac{dx}{dt}$ de la partícula en el instante t

De acuerdo con las leyes de la Mecánica, la fuerza produce una aceleración $a = \dfrac{d^2x}{d^2t}$, de modo que

$$F(t) = mx''(t)$$

Ley de Newton del Calentamiento y Enfriamiento

La razón de cambio de la temperatura de un cuerpo en contacto con otro es proporcional a la diferencia de temperatura entre ambos. De esta manera, si T(t) representa la temperatura del cuerpo en el instante t y T_0 es la temperatura de otro cuerpo en contacto con él, o, en muchos casos, la temperatura del exterior o ambiente que rodea al cuerpo, y K es cierta constante, entonces la ley de Newton queda establecida por medio de la ecuación diferencial:

$$T'(t) = K(T_0 - T(t))$$

La solución a esta ecuación es

$$T(t) = T_0 - Ce^{Kt}$$

Ejemplo: Curva que desciende en la dirección de la máxima pendiente en una superficie dada por la ecuación $z = f(x, y)$:

$$\bigtriangledown X(t) = -\bigtriangledown f(X(t)),$$

o si escribimos $X(t) = (x(t), y(t))$,

$$x'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \quad y'(t) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Es una ecuación diferencial de primer orden en dimensión 2.

Ejemplo: Una bola en una superficie dada por la ecuación $z = f(x, y)$ sometida únicamente a la fuerza de la gravedad verifica la ecuación:

$$\triangle X(t) = g \bigtriangledown f(X(t)),$$

o si escribimos $X(t) = (x(t), y(t))$,

$$x''(t) = g \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \quad y''(t) = g \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

Es una ecuación diferencial de segundo orden en dimensión 2.

Ecuaciones en derivadas parciales

En una **ecuación en derivadas parciales** se trata de determinar una función de varias variables solución de una ecuación en la que aparecen las derivadas parciales de dicha función.

Por ejemplo, la ecuación del calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

donde se trata de determinar la función de cuatro variables $u(x, y, z, t)$ que da la temperatura de cada punto del espacio en cada instante de tiempo.

Ecuación diferencial de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden es

$$x' = f(t, x), \tag{3.1}$$

Una solución de la ecuación (3.1) es una función $x \colon I \to \mathbb{R}$, siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$, tal que para todo $t \in I$

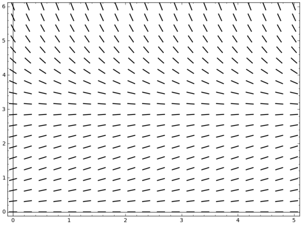
$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Ejemplos:

- $p(t) = e^{ct}$ es solución de $p'(t) = cp(t)$.
- $x(t) = \sin t$ es solución de $x''(t) + x(t) = 0$

Campo de pendientes

Dada una ED, si en cada punto del plano (t, x) asignamos la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $f(t, x)$, obtenemos:



Este es el denominado **campo de pendientes** de la ecuación.

En cada punto $(t, x(t))$ de la gráfica de una solución, la pendiente de la recta tangente que pasa por dicho punto es $x'(t) = f(t, x(t))$.

Luego las soluciones son las curvas que en cada punto son tangentes a la recta asignada.

Problema de valor inicial

El problema de valor inicial consiste en determinar las soluciones de

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.2}$$

donde f, t_0, x_0 son conocidos y (t_0, x_0) es una **condición inicial**.

Problema de valor inicial

El problema de valor inicial consiste en determinar las soluciones de

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.2}$$

donde f, t_0, x_0 son conocidos y (t_0, x_0) es una **condición inicial**.

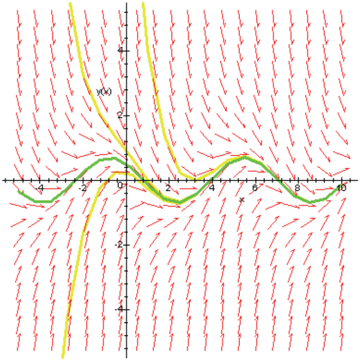
Teorema

Si f es diferenciable, entonces el problema de valor inicial tiene una única solución.

En particular, si f es diferenciable, dos soluciones de $x' = f(t,x)$ no se pueden cortar.

Campo de pendientes para el problema de valor inicial

Teniendo el campo de pendientes de una EDO, podemos dibujar las curvas solución que pasan por una condición inicial dada.



Ecuaciones del tipo $x' = g(t)$

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = g(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

Podemos resolverlo así:

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \Longrightarrow dx = g(t)dt \Longrightarrow \int dx = \int g(t)dt$$

Luego $x(t) = \int g(t)dt$. Imponiendo $x(t_0) = x_0$, tenemos una única solución.

Por ejemplo, $x' = t^2 + t + 1$.

Una ecuación diferencial autónoma de primer orden es:

$$x'(t) = f(x(t)) \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt} = f(x(t))$$

Suponiendo que $f(x(t)) \neq 0$, entonces

$$\frac{dx}{f(x(t))} = dt \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{f(x(t))} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Despejando de esa ecuación, obtenemos la solución $x(t)$.

Ejemplo

Consideremos el problema de valor inicial

$$x'(t) = x^3(t), \quad x(2) = 1 \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = x^3(t)$$

Entonces

$$\int_2^t \frac{dx}{x^3(t)} = \int_2^t dt \;\Rightarrow\; \left[\frac{-1}{2x^2(t)}\right]_2^t = [t]_2^t = t - 2$$

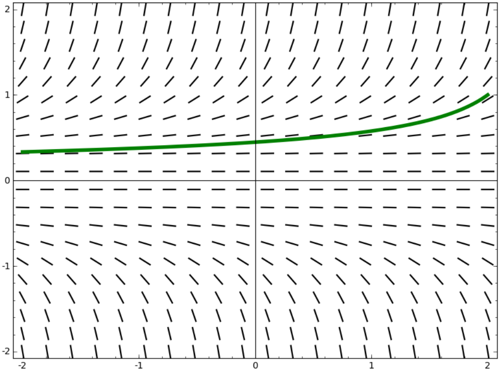
$$\frac{-1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2\cdot x(2)^2} = \frac{-1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2} = t - 2$$

Despejando $x^2(t) = \dfrac{1}{5-2t}$. Al hacer la raíz cuadrada tenemos que elegir un signo. Elegimos $+$ pues $x(2) = 1$.

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{5-2t}}$$

Campo de Pendientes

El campo de pendientes de la ED $x' = x^3$ se muestra a continuación. En verde se muestra la solución que pasa por el punto $(2, 1)$.



Ecuaciones de variables separadas

Las ecuaciones diferenciales de variables separadas tienen la forma

$$x' = g(t)f(x), \tag{3.3}$$

Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = g(t)f(x) \Longrightarrow \frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

e integrando:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)\, dt$$

Despejando obtenemos la solución $x(t)$.

Ejemplo

Consideremos la ecuación

$$x'(t) = tx(t).$$

Entonces

$$\frac{dx}{x} = tdt.$$

Integrando

$$\ln(|x|) = \frac{t^2}{2} + K.$$

Despejando

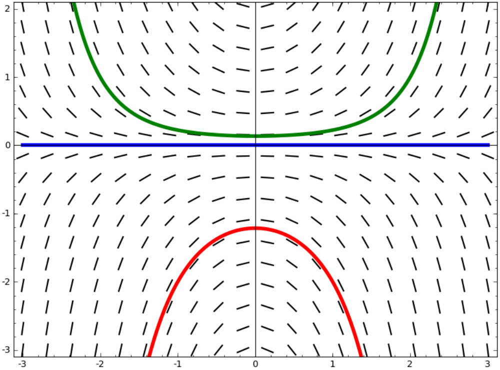
$$x(t) = \pm K e^{t^2/2}$$

En función de la condición inicial tendremos el signo:

- $x(2) = 1 \Rightarrow x(t) = e^{-2+t^2/2}$
- $x(3) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ es la solución (0 es punto fijo).
- $x(1) = -2 \Rightarrow$ $x(t) = -2e^{(-1+t^2)/2}$

Campo de Pendientes

El campo de pendientes de la ED $x' = tx$ se muestra a continuación. En verde se muestra la solución que pasa por el punto $(2, 1)$, en azul la que pasa por $(3, 0)$ y en rojo la que pasa por $(1, -2)$

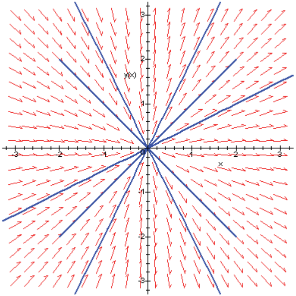


Ejemplo

Consideremos la EDO $x' = x/t$. Puesto que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \Longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln x = \ln t + C$$

las soluciones son las rectas que pasan por el origen, de la forma $x(t) = Kt$.



Ecuaciones lineales

Sean $g(t)$ y $h(t)$ funciones continuas definidas en el intervalo I. La ecuación

$$x' + g(t)x = h(t)$$

es una **ecuación diferencial lineal de primer orden**.

La ecuación es **homogénea** si es de la forma

$$x' + g(t)x = 0$$

Método de Resolución de Ecuaciones Lineales

1. Resolvemos la ecuación lineal homogénea asociada:

$$x' + g(t)x = 0$$

   Es una ecuación de variables separadas, y la solución es

$$x_H = Ke^{-\int g(t)dt}$$

2. Buscamos una solución particular, mediante el método de variación de constantes, haciendo

$$x_P = K(t)e^{-\int g(t)dt}$$

   imponiendo que x_P sea solución de $x' + g(t)x = h(t)$

3. Las soluciones de la ecuación lineal son las funciones de la forma

$$\boxed{x = x_P + x_H}$$

Método de Resolución de Ecuaciones Lineales

Método de variación de constantes Como $x(t) = K(t)e^{-\int g(t)dt}$,

$$x'(t) = K'(t)e^{-\int g(t)dt} - K(t)e^{-\int g(t)dt}g(t)$$

con lo cual, sustituyendo en la ecuación lineal,

$$K'(t)e^{-\int g(t)dt} - K(t)e^{-\int g(t)dt}g(t) + g(t)K(t)e^{-\int g(t)dt} = h(t)$$

Así es que tenemos una ecuación de variables separadas:

$$K'(t)e^{-\int g(t)dt} = h(t) \Longrightarrow K'(t) = h(t)e^{\int g(t)dt}$$

Luego $K(t) = \int h(t)e^{\int g(t)dt}$

Problema de valor inicial

En el caso de que tengamos un problema de valor inicial con una ED lineal, resolvemos la ecuación y luego imponemos el valor inicial $x(t_0) = x_0$.

Ejemplos:

1. $x' - x = e^t$, $x(0) = 1$
2. $2(x - 4t^2) + tx' = 0$, $x(1) = 2$
3. $tx' - 2x = t^2$, $x(1) = 3$

Método de Euler

Queremos resolver

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Vamos a tratar de aproximar numéricamente la solución, partiendo de t_0 y avanzando en pasos de longitud h. Es decir, calcular la solución en

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \ldots$$

Denotarmos x_k a la aproximación de $x(t_k)$. Podemos aproximar la solución en t_{k+1} por la tangente en (t_k, x_k):

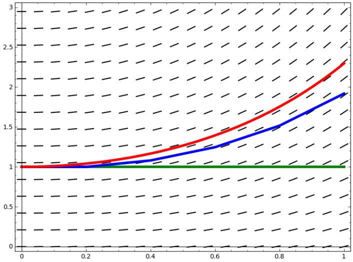
$$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + x'(t_k)(t_{k+1} - t_k) \approx x_k + f(t_k, x_k)h$$

Es decir:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)}$$

Ejemplo: método de Euler

- $x_0 = 1,\ x_1 = 1$
- $x_2 = x_1 + 0{,}2(t_1 x_1 + t_1) = 1 + 0{,}2(0{,}2 * 1 + 0{,}2) = 1{,}08$
- $x_3 = x_2 + 0{,}2(t_2 x_2 + t_2) = 1{,}08 + 0{,}2(0{,}4 * 1{,}08 + 0{,}4) = 1{,}2464$
- $x_4 = x_3 + 0{,}2(t_3 x_3 + t_3) = 1{,}515968$
- $x_5 = x_4 + 0{,}2(t_4 x_4 + t_4) = 1{,}91852288$



Verde: solución en un paso de Euler
Azul: solución en 5 pasos
Rojo: solución real

Método de Euler modificado

Integrando la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$, tenemos:

$$x(t) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Calculando numéricamente dicha integral, tendremos nuevos métodos. Por ejemplo, por el método del trapecio:

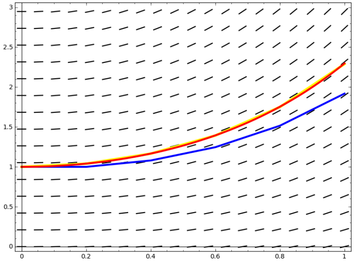
$$x_{k+1} \approx x_k + \frac{h}{2} \left(f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1}) \right).$$

Podemos aproximar $f(t_{k+1}, x_{k+1})$ por $f(t_k + h, x_k + hf(t_k, x_k))$, obteniendo el método de Euler modificado:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} \left(f(t_k, x_k) + f(t_k + h, x_k + hf(t_k, x_k)) \right)}$$

Ejemplo: método de Euler modificado

- $x_0 = 1,\ x_1 = 1$
- $x_2 = x_1 + 0{,}2(t_1 x_1 + t_1) = 1 + 0{,}2(0{,}2 * 1 + 0{,}2) = 1{,}08$
- $x_3 = x_2 + 0{,}2(t_2 x_2 + t_2) = 1{,}08 + 0{,}2(0{,}4 * 1{,}08 + 0{,}4) = 1{,}2464$
- $x_4 = x_3 + 0{,}2(t_3 x_3 + t_3) = 1{,}515968$
- $x_5 = x_4 + 0{,}2(t_4 x_4 + t_4) = 1{,}91852288$



Azul: solución en 5 pasos de Euler
Rojo: solución real
Amarillo: Euler modificado

Método de Runge-Kutta

Un método mucho más potente que los anteriores es el Método de Runge-Kutta (RK4).

Conocido x_k, calculamos la aproximación x_{k+1} como:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}\left(f_{k_1} + 2f_{k_2} + 2f_{k_3} + f_{k_4}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} f_{k_1} &= f(t_k, x_k), \\ f_{k_2} &= f(t_k + h/2, x_k + hf_{k_1}/2), \\ f_{k_3} &= f(t_k + h/2, x_k + hf_{k_2}/2), \\ f_{k_4} &= f(t_k + h, x_k + hf_{k_3}) \end{aligned}$$

Problema de valor inicial

Consideremos que tenemos una función f y la ecuación de segundo órden

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)). \tag{4.1}$$

Dados $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$, se denomina **problema de valor inicial** a

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

y a (t_0, x_0, v_0) se denomina **condición inicial**.

Problema de valor inicial

Consideremos que tenemos una función f y la ecuación de segundo órden

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)). \tag{4.1}$$

Dados $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$, se denomina **problema de valor inicial** a

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

y a (t_0, x_0, v_0) se denomina **condición inicial**.

Teorema

Si f es diferenciable, entonces el problema de valor inicial tiene una única solución.

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Fijados $a, b \in \mathbb{R}$, consideremos

$$x'' + ax' + bx = 0, \tag{4.2}$$

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Fijados $a, b \in \mathbb{R}$, consideremos

$$x'' + ax' + bx = 0, \tag{4.2}$$

Probaremos con soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$.

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Fijados $a, b \in \mathbb{R}$, consideremos

$$x'' + ax' + bx = 0, \tag{4.2}$$

Probaremos con soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$.

Sustituyendo en la ecuación:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0.$$

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Fijados $a, b \in \mathbb{R}$, consideremos

$$x'' + ax' + bx = 0, \tag{4.2}$$

Probaremos con soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$.

Sustituyendo en la ecuación:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0.$$

Por tanto, $x(t) = e^{\lambda t}$ es solución de la ecuación si y solo si λ es raíz de

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Esta ecuación se denomina **ecuación característica**

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Como el problema de valor inicial tiene solución única, todas las soluciones de

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

dependerán de dos parámetros (para cada t_0 podemos elegir x_0 y v_0).

Por otra parte, si x_1, x_2 son soluciones de la ecuación, entonces

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

es solución de la ecuación para todo valor de c_1, c_2.

Buscamos x_1, x_2 tales que fijado un tiempo t_0, los vectores $(x_1(t_0), x_1'(t_0))$ y $(x_2(t_0), x_2'(t_0))$ sean linealmente independientes.

Discriminante positivo ($a^2 - 4b > 0$)

La ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas.

Denotemos λ_1, λ_2 a dichas raíces.

Discriminante positivo ($a^2 - 4b > 0$)

La ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas.

Denotemos λ_1, λ_2 a dichas raíces.

Entonces dos soluciones son:

$$x_1(t) = e^{t\lambda_1}, \quad x_2(t) = e^{t\lambda_2}.$$

Discriminante positivo ($a^2 - 4b > 0$)

La ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas.

Denotemos λ_1, λ_2 a dichas raíces.

Entonces dos soluciones son:

$$x_1(t) = e^{t\lambda_1}, \quad x_2(t) = e^{t\lambda_2}.$$

Todas las soluciones serán

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Discriminante nulo ($a^2 - 4b = 0$)

$\lambda = -a/2$ raíz doble de la ecuación característica.

Tenemos que $x_1(t) = e^{-ta/2}$ es una solución.

Discriminante nulo ($a^2 - 4b = 0$)

$\lambda = -a/2$ raíz doble de la ecuación característica.

Tenemos que $x_1(t) = e^{-ta/2}$ es una solución.

Una segunda solución es:

$$x_2(t) = te^{-ta/2}.$$

Discriminante nulo ($a^2 - 4b = 0$)

$\lambda = -a/2$ raíz doble de la ecuación característica.

Tenemos que $x_1(t) = e^{-ta/2}$ es una solución.

Una segunda solución es:

$$x_2(t) = te^{-ta/2}.$$

Entonces todas las soluciones son:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Discriminante negativo ($a^2 - 4b < 0$)

Hay dos raíces conjugadas complejas de la ecuación característica, $\alpha \pm \beta i$, donde

$$\alpha = -a/2, \quad \beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}.$$

Tenemos las soluciones siguientes ($e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$):

$$x_1 = e^{t\alpha}\cos(\beta t), \quad x_2 = e^{t\alpha}\operatorname{sen}(\beta t).$$

Entonces todas las soluciones son

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$