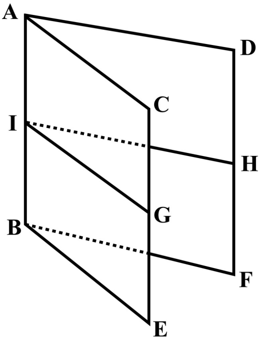
Métodos Matemáticos
Trigonometría Esférica

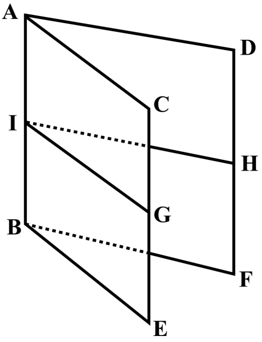
José Luis Bravo Trinidad

Diedro



Diedro: región (convexa) del espacio comprendida entre dos semiplanos (denominados **caras**) limitados por una recta común (denominada **arista**).

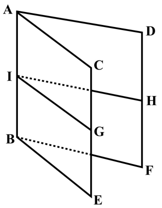
Diedro

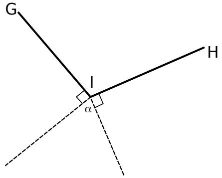


Diedro: región (convexa) del espacio comprendida entre dos semiplanos (denominados **caras**) limitados por una recta común (denominada **arista**).

Ángulo del diedro: ángulo que forman cualquier par de rectas perpendiculares a la arista tales que cada recta esté contenida en una cara.

Diedro

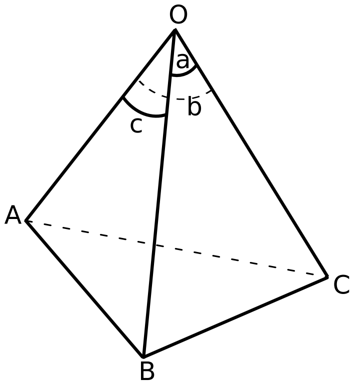




Tomamos para cada cara del diedro, la semirecta perpendicular punto I que no esté contenida en el diedro. Entonces el ángulo que forman dichas rectas es suplementario al ángulo del diedro.

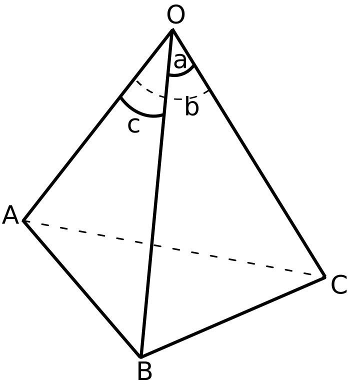
$$\widehat{GIH} + \alpha = 180.$$

Triedro



Triedro: región (convexa) del espacio comprendida entre tres semirectas (llamadas **aristas**) y las regiones de plano que definen, no contenidas en un plano y con un punto común (llamado **vértice**.

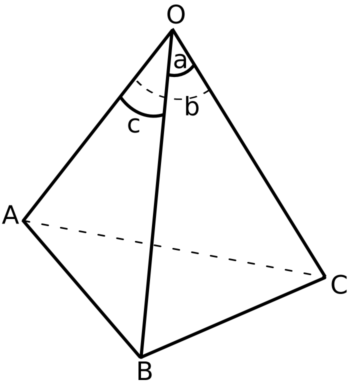
Triedro



Triedro: región (convexa) del espacio comprendida entre tres semirectas (llamadas **aristas**) y las regiones de plano que definen, no contenidas en un plano y con un punto común (llamado **vértice**.

Lados o **caras** del triedro: angulos comprendidos entre cada dos aristas. Miden menos de 180^o.

Triedro

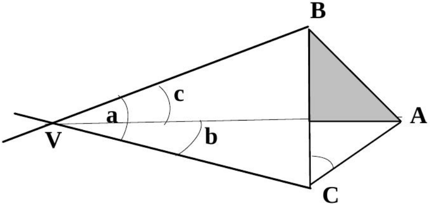


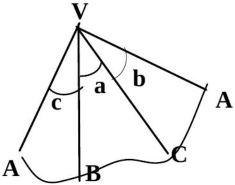
Triedro: región (convexa) del espacio comprendida entre tres semirectas (llamadas **aristas**) y las regiones de plano que definen, no contenidas en un plano y con un punto común (llamado **vértice**.

Lados o **caras** del triedro: angulos comprendidos entre cada dos aristas. Miden menos de 180^o.

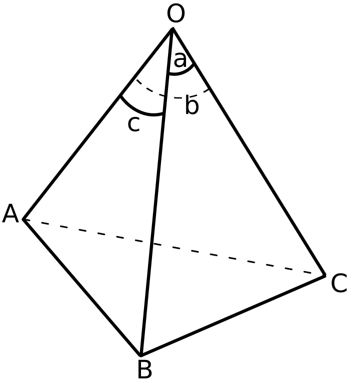
Ángulos del triedro: diedros determinados por cada arista del triedro tal que cada cada cara del diedro contiene a una de las otras dos aristas. Miden menos de 180^o

Despliegue de un triedro



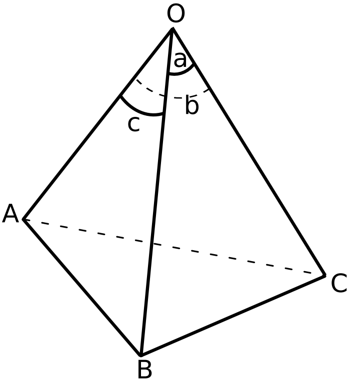


Triedro polar



Para cada cara del triedro, consideramos la semirecta perpendicular por el vértice del triedro que no esté incluida en ninguno de los ángulos dihedros.

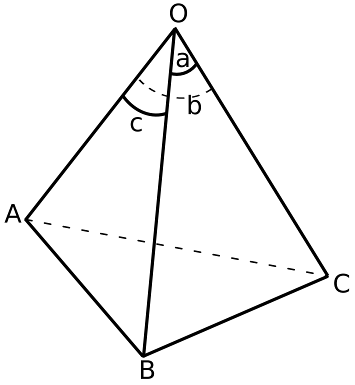
Triedro polar



Para cada cara del triedro, consideramos la semirecta perpendicular por el vértice del triedro que no esté incluida en ninguno de los ángulos dihedros.

Se denomina **triedro polar** al limitado por esas tres rectas

Triedro polar

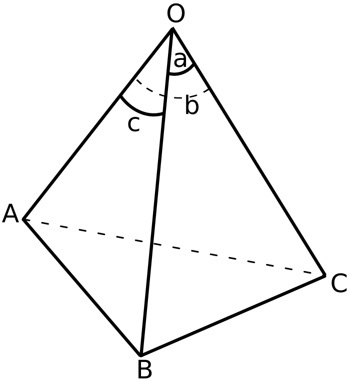


Para cada cara del triedro, consideramos la semirecta perpendicular por el vértice del triedro que no esté incluida en ninguno de los ángulos dihedros.

Se denomina **triedro polar** al limitado por esas tres rectas

Los ángulos del triedro polar son los ángulos suplementarios de las caras del triedro original y las caras del triedro polar son los ángulos suplementarios del triedro original.

Propiedades del triedro



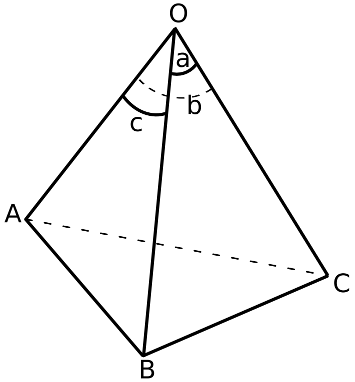
- Una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que la diferencia.

$$|a - b| < c < a + b$$

- A mayor ángulo se le opone mayor cara.

$$A > B \Leftrightarrow a > b$$

Propiedades del triedro



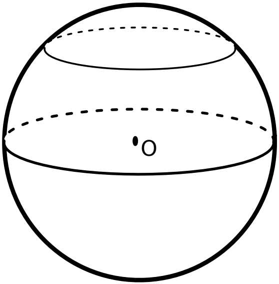
- La suma de los ángulos de las caras es menor que cuatro ángulos rectos.

$$a + b + c < 360^o$$

- La suma de los tres ángulos del triedro está comprendida entre dos y seis ángulos rectos.

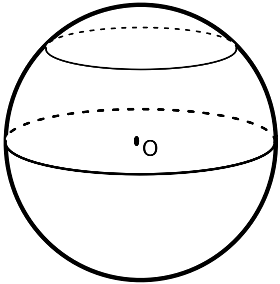
$$180^o < A + B + C < 540$$

Circunferencia máxima y menor



Circunferencia menor: Es la intersección con la esfera de un plano que no pasa por el origen de la esfera.

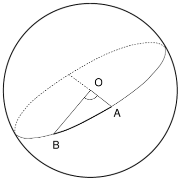
Circunferencia máxima y menor

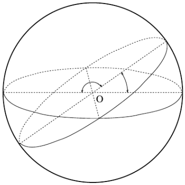


Circunferencia menor: Es la intersección con la esfera de un plano que no pasa por el origen de la esfera.

Circunferencia máxima: es la intersección con la esfera de un plano que pasa por el origen de la esfera.

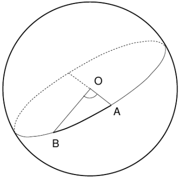
Distancia y ángulos



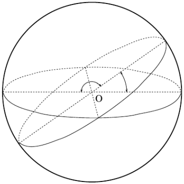


Distancia: La distancia entre dos puntos A, B de la esfera es la longitud del (menor) arco comprendido entre A y B de la circunferencia máxima determinada por los puntos.

Distancia y ángulos

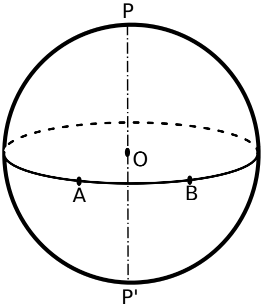


Distancia: La distancia entre dos puntos A, B de la esfera es la longitud del (menor) arco comprendido entre A y B de la circunferencia máxima determinada por los puntos.



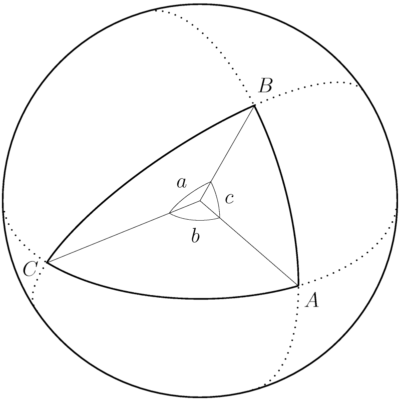
Ángulo de dos circunferencias máximas: es el ángulo diedro determinado por los planos que contienen ambas circurferencias máximas.

Polos



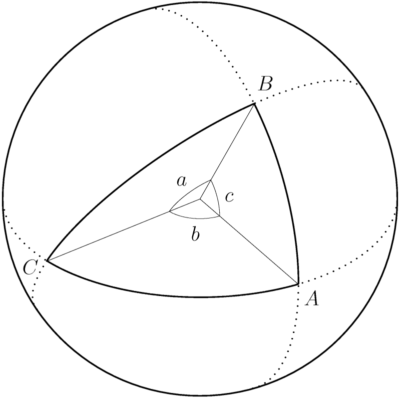
Polos de una circunferencia máxima: son los puntos obtenidos al intersecar la recta que pasa por el origen de la esfera perpendicular al plano que contiene la circunferencia máxima.

Triángulo esférico



Triángulo esférico: es la región de la esfera determinada por la intersección entre la esfera y un triedo con vértice en el origen de la esfera.

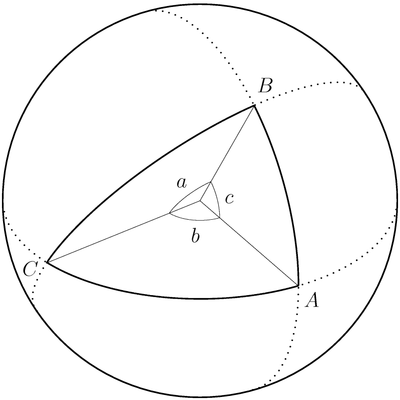
Triángulo esférico



Triángulo esférico: es la región de la esfera determinada por la intersección entre la esfera y un triedo con vértice en el origen de la esfera.

Lados del triángulo esférico: son las intersecciones con las caras del triedro.

Triángulo esférico

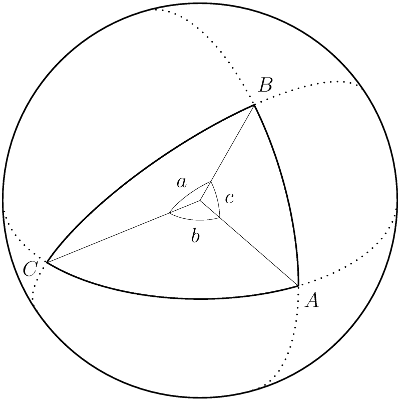


Triángulo esférico: es la región de la esfera determinada por la intersección entre la esfera y un triedo con vértice en el origen de la esfera.

Lados del triángulo esférico: son las intersecciones con las caras del triedro.

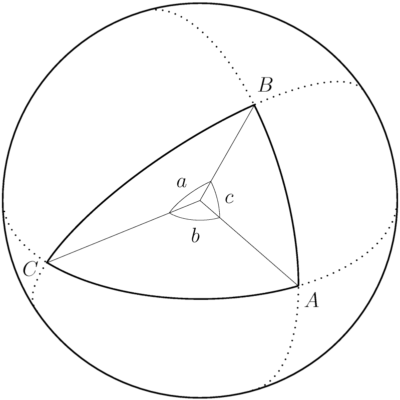
Ángulos o vértices del triángulo esférico son los ángulos esféricos determinados por las intersecciones de los ángulos del triedro.

Propiedades



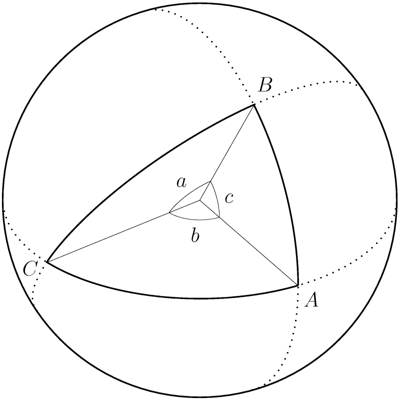
- A mayor ángulo se opone mayor lado
  $A > B \Leftrightarrow a > b$
- Dos lados son iguales sí y sólo si los lados opuestos son iguales.
  $A = B \Leftrightarrow a = b$
- La suma de los ángulos es mayor que dos rectos y menor que seis.
  $180^o < A + B + C < 540^o$
  Exceso esférico:
  $\epsilon = A + B + C - 180.$

Propiedades



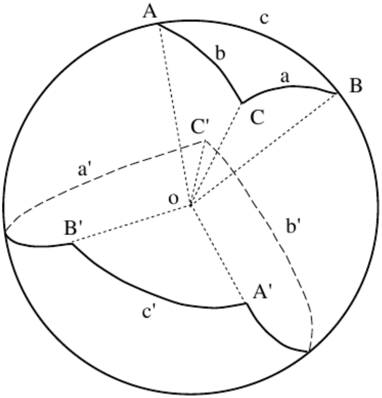
- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que 180º.

Propiedades



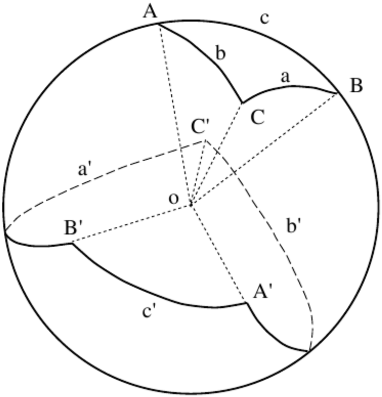
- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que 180^o.
- Cada lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.
  $|b - a| < c < a + b$
- La suma de los tres lados es menor que cuatro rectos.
  $a + b + c < 360$
  Defecto esférico:
  $d = 360 - (a + b + c)$.

Triángulo polar



Dado el lado a consideramos los polos de la circunferencia máxima que define.

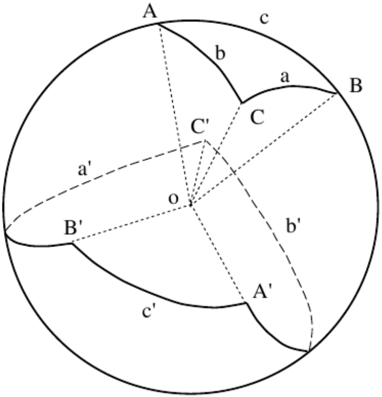
Triángulo polar



Dado el lado a consideramos los polos de la circunferencia máxima que define.

De los dos polos, elegimos el más lejano a A y lo denotamos A'.

Triángulo polar

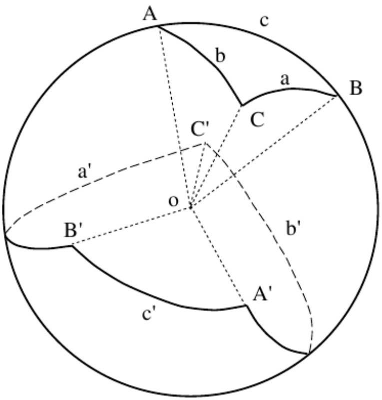


Dado el lado a consideramos los polos de la circunferencia máxima que define.

De los dos polos, elegimos el más lejano a A y lo denotamos A'.

Repetimos el proceso para b, c.

Triángulo polar



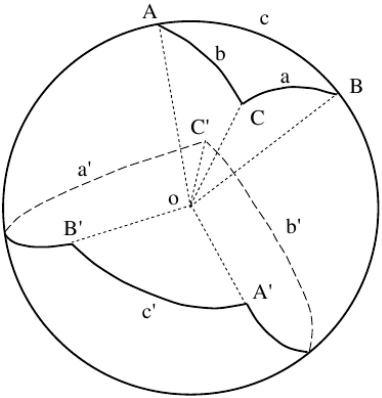
Dado el lado a consideramos los polos de la circunferencia máxima que define.

De los dos polos, elegimos el más lejano a A y lo denotamos A'.

Repetimos el proceso para b, c.

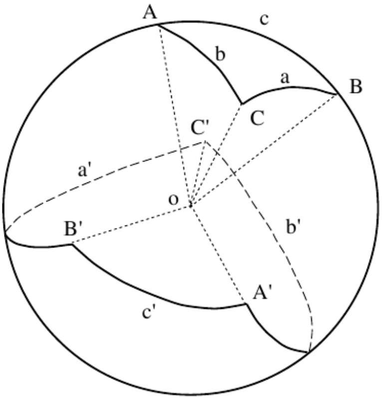
Se define el **triángulo polar** como el triángulo esférico determinado por los tres puntos A', B', C' así obtenidos.

Triángulo polar



Por definición, los vértices del triángulo polar son polos del triángulo original.

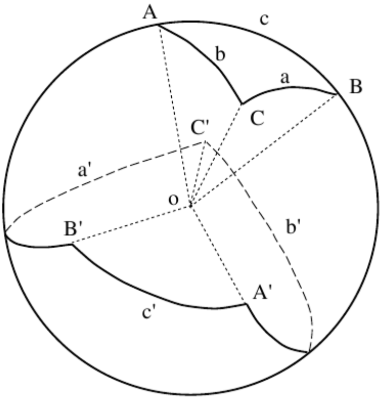
Triángulo polar



Por definición, los vértices del triángulo polar son polos del triángulo original.

Además, los polos de los lados del triángulo polar son los vértices del triángulo original.

Triángulo polar

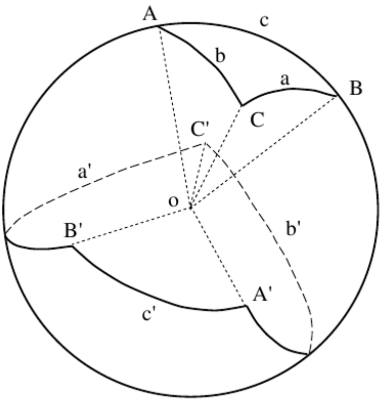


Por definición, los vértices del triángulo polar son polos del triángulo original.

Además, los polos de los lados del triángulo polar son los vértices del triángulo original.

Si tenemos un triángulo esférico, calculamos su triángulo polar y el triángulo polar del triángulo polar, volvemos al triángulo original.

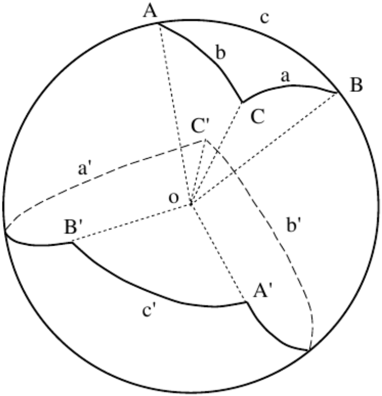
Triángulo polar



Los ángulos del triángulo polar son suplementarios a los lados del triángulo.

$A' = 180^o - a,$
$B' = 180^o - b,$
$C' = 180^o - c.$

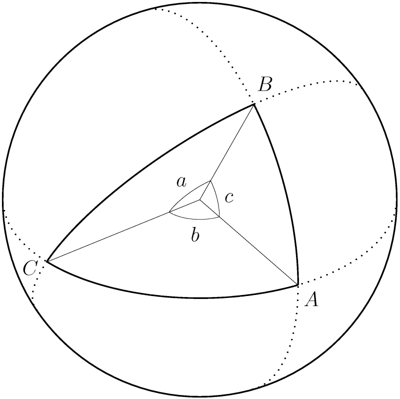
Triángulo polar



Los ángulos del triángulo polar son suplementarios a los lados del triángulo.
$A' = 180^o - a$,
$B' = 180^o - b$,
$C' = 180^o - c$.

Los lados del triángulo polar son suplementarios a los ángulos del triángulo.
$a' = 180^o - A$,
$b' = 180^o - B$,
$c' = 180^o - C$.

Superficie de polígonos esféricos

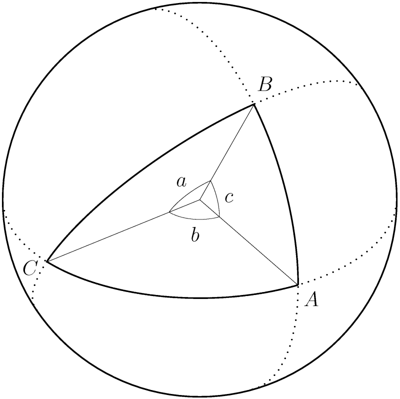


El área de un un triángulo esférico es igual al exceso esférico en radianes por el radio al cuadrado.

$$S = r^2(A + B + C - \pi)$$

En grados: $S = r^2 \epsilon \frac{\pi}{180}$

Superficie de polígonos esféricos



El área de un un triángulo esférico es igual al exceso esférico en radianes por el radio al cuadrado.

$S = r^2(A + B + C - \pi)$

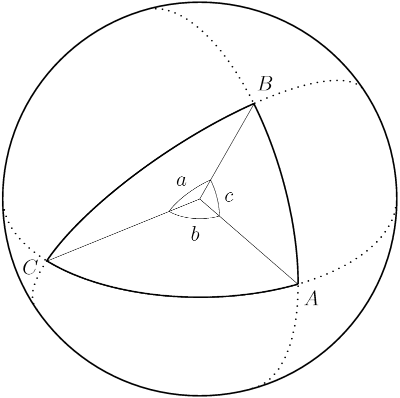
En grados: $S = r^2 \epsilon \frac{\pi}{180}$

El área de un polígono esférico de ángulos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ viene dada por

$S = r^2 \frac{\pi(A_1 + \ldots + A_n - (n-2)180)}{180}$.

- **isósceles:** Dos de los lados son iguales.
- **equilatero:** Tres lados son iguales.
- **rectángulo:** Uno de los ángulos es recto.
- **birrectángulo:** Dos de los ángulos son rectos.
- **rectilátero:** Uno de los lados es recto.
- **birectilátero:** Dos de los lados son rectos.

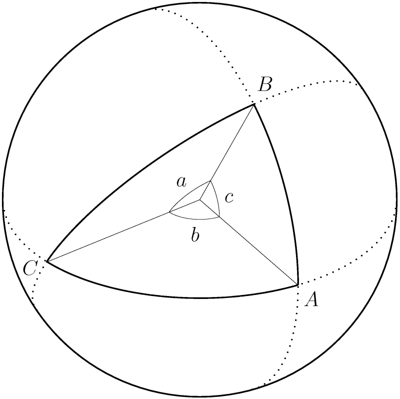
Primera Fórmula de Bessel - Teorema del Coseno



En un triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto del coseno de los otros dos lados más el producto de los senos de los otros dos lados por el coseno del ángulo comprendido.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}}$$

Segunda Fórmula de Bessel - Teorema del Seno



En un triángulo esférico, la proporción entre el seno de un ángulo y el seno del lado opuesto es constante.

$$\boxed{\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}}$$

Tercera Fórmula de Bessel - Teorema de la Cotangente

En un triángulo esférico se verifica:

$$\boxed{\begin{aligned}
\cot a \operatorname{sen} b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A,\\
\cot a \operatorname{sen} c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A,\\
\cot b \operatorname{sen} a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B,\\
\cot b \operatorname{sen} c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B,\\
\cot c \operatorname{sen} a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C,\\
\cot c \operatorname{sen} b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C,
\end{aligned}}$$

Cuarta Fórmula de Bessel - Teorema del Coseno para los Ángulos

En un triángulo esférico, el coseno de un ángulo es igual a menos el producto del coseno de los otros dos ángulos más el producto de los senos de los otros dos ángulos por el coseno del lado comprendido.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned}}$$

Analogías de Gauss-Delambre

En un triángulo esférico se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, & \dfrac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}, \\ \dfrac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, & \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}. \end{array}}$$

Dichas formular siguen funcionando cambiando la nomenclatura de vértices y aristas.

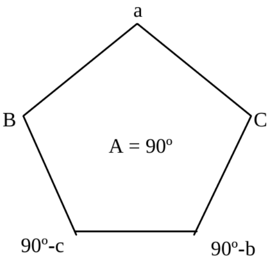
Analogías de Neper

En un triángulo esférico se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\tan\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}, \\ \dfrac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}, & \dfrac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}. \end{array}}$$

Dichas formular siguen funcionando cambiando la nomenclatura de vértices y aristas.

Regla de Neper (Triángulos rectángulos)



El **coseno** de cada vértice es igual al producto de los **senos** de cada vértice **opuesto**.

El **coseno** de cada vértice es igual al producto de las **cotangentes** de los vértices **adyacentes**.

Propiedades de los triángulos rectángulos

En todo triángulo rectángulo un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.

En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es menor de 90^o si los dos catetos son de la misma especie (los dos agudos o los dos obtusos) y es mayor de 90^o en caso contrario.

En todo triángulo rectángulo, o bien los tres lados son menores de 90^o o bien sólo uno es menor de 90^o.

Ejemplo de resolución

Supongamos que conocemos $a = 60^o$ y $b = 50^o$.

En el pentágono de Neper formamos todos los triángulos que tenga a a, b como dos vertices y calculamos las fórmulas:

$$\begin{aligned} \cos\ a &= \sin(90-b)\sin(90-c), \\ \cos C &= \cot a \cot(90-b), \\ \cos(90-b) &= \cot a \cot B. \end{aligned}$$

La primera fórmula queda

$$\cos\ a = \cos b \cos c.$$

y podemos despejar c:

$$c = \operatorname{acos}(cos\ a / \cos\ b) = 36^o 56'$$

Como hemos usado el arcocoseno no hay ninguna ambigüedad.

Ejemplo de resolución (cont.)

Para obtener los dos ángulos las fórmulas restantes,

$$\cos C = \cot a \tan b,$$

$$\sin(b) = \cot a \cot B.$$

De aquí,

$$C = \operatorname{acos}(\cot a \tan b) = 46^o 31'$$

y

$$B = \operatorname{asen}(\cot a / \sin b) = 48^o 54'.$$

Como hemos usado el arcoseno hay una intedederminación en B (podría ser también $180^o - 48^o 54'$. Para decidir que es correcto el dato obtenido, aplicamos que en un triángulo rectángulo a catetos agudos se oponen ángulos agudos.

Resolución de triángulos rectiláteros

Dado un triángulo rectilátero de ángulos y lados A, B, C, a, b, c, consideramos el triángulo polar de ángulos y lados

$$A' = 180 - a, B' = 180 - b, C' = 180 - c$$

$$a' = 180 - A, b' = 180 - B, c' = 180 - C.$$

El triángulo polar es rectángulo, luego podemos obtener los lados y ángulos con el procediento anterior.

Finalmente, obtenemos los lados y ángulos del triángulo original con las relaciones:

$$A = 180 - a', B = 180 - b', C = 180 - c'$$

$$a = 180 - A', b = 180 - B', c = 180 - C'.$$

Resolución de triángulos esféricos

Si conocemos tres datos, tenemos los siguientes casos:

1. **Tres lados.** Resolvemos usando el Tª del Coseno.
2. **Dos lados y el ángulo comprendido.** Tª del Coseno y Tª Cotangente.
3. **Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.**
4. **Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.**
5. **Dos ángulos y el lado comprendido.** Tª del Coseno para Ángulos y Tª Cotangente.
6. **Tres ángulos.** Resolvemos con el Tª del Coseno para Ángulos.

Excepto en los casos 3 y 4, se resuelve el triángulo usando los teoremas indicados y no hay indeterminación.

Método del perpendínculo

Supongamos que tenemos los lados a, b y el ángulo A. Calculamos el ángulo B utilizando el Teorema del Seno y las propiedades de los triángulos esféricos (a mayor lado se opone mayor ángulo).

Consideramos la circunferencia máxima que pasa por el vértice C y es perpendicular a la circunferencia máxima definida por el lado c. Denominamos H al vértice intersección de ambas circunferencias máximas)

Esto nos define dos triángulos rectángulos. Debemos distinguir dos casos, según A, B sean de la misma especie (en cuyo caso podemos asumir que H está en el lado c) o de distinta especie.

Resolvemos los dos triángulos rectángulos y a partir de ellos calculamos c y C.

Resolución mediante ecuación de segundo grado

Veamos un ejemplo de resolución cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto.
Supongamos que tenemos los lados a, b y el ángulo A. El Teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Escribimos $\sin c = \sqrt{1 - \cos^2 c}$. Despejamos la raíz y elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \cos A}\right)^2 = 1 - \cos^2 c.$$

Tenemos una ecuación de segundo grado en $\cos c$:

$$(\cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 A) \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 a - \sin^2 b \cos^2 A = 0.$$

Despejamos $\cos c$ (podemos tener 0, 1 o 2 soluciones) y obtenemos c.

Método directo

Supongamos que tenemos los lados a, b y el ángulo A. Del Teorema del Seno, obteneos el ángulo B. Nótese que tenemos dos soluciones posibles. Aplicamos las propiedades de los triángulos esféricos para ver si podemos descartar alguno.
Para obtener el lado y ángulo restante, usamos las analogías de Neper. Tenemos que hacerlo para cada uno de los dos casos anteriores.
Finalmente, comprobamos si las soluciones anteriores son válidas (propiedades de los triángulos rectángulos, analogías de Gauss-Delambre, Teorema del Seno)