# Resolución de sistemas de ecuaciones

Métodos Matemáticos
Grado en Geomática y Topografía

J.L. Bravo

Curso 2015-2016

# Introducción al Cálculo Numérico

# Introducción

**Cálculo Numérico**: describir, analizar y desarrollar algoritmos numéricos que permitan solucionar problemas matemáticos en los cuales están involucradas cantidades numéricas.

Se aplica cuando:

- El problema no posee solución analítica (como $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos(x)^2}dx$)
- El procedimiento para hallar la solución es excesivamente complicado
- O excesivamente costoso

Veremos cómo resolver numéricamente ecuaciones, sistemas de ecuaciones, cálculo de extremos, integrales, ...
También estudiaremos cómo interpolar datos, es decir, a partir de valores en puntos conocidos, obtener una función (simple) que tenga esos mismos valores.

# Error

- **Error**: toda aproximación $a$ de un valor real $r$ lleva asociada un error.
  - **Error absoluto**: $E = r - a$
  - **Error relativo**: $e = \dfrac{E}{r}$ (interpretable en %)
- **Cifras significativas**: Consideremos un número real $r$. Se denomina primera cifra significativa a la primera cifra no nula, comenzando por la izquierda. La segunda cifra significativa es la cifra a la derecha de la primera y así sucesivamente.

  Por ejemplo, la primera cifra significativa de $00123,45$ es el 1 y está en la posición de las centenas. La segunda cifra es el 2, etc.

# Error

**Cifras significativas**.

Decimos que una aproximación $a$ de un valor real $r$ tiene $n$ **cifras significativas** si el error absoluto es 0 al menos hasta la posición de la enésima cifra significativa de $r$ y el valor de la cifra del error en la posición de la $n+1$-ésima cifra significativa de $r$ es menor que 5.

Si el número $r$ se escribe en notación científica como $\pm r_1, \ldots \cdot 10^p$, tiene $n$ cifras signficativas si

$$|r-a| < 5 \cdot 10^{p-n}$$

Ej: 1.234 es una aproximación con tres cifras significativas de 1.233 y de cuatro cifras significativas de 1.2339.

# Ejemplos

Medimos una carretera de $r_1 = 123kms$ y nuestra medida es $a_1 = 123,6kms$.

Error absoluto: $E_1 = 123 - 123,6 = -0,6kms$.

Error relativo: $e_1 = (123 - 123,6)/123 = -0,0049$.

Cifras significativas: 2

# Ejemplos

Medimos una carretera de $r_1 = 123 kms$ y nuestra medida es $a_1 = 123,6 kms$.

Error absoluto: $E_1 = 123 - 123,6 = -0,6 kms$.

Error relativo: $e_1 = (123 - 123,6)/123 = -0,0049$.

Cifras significativas: 2

Medimos el río Amazonas $(r_2 = 6437 kms)$ y obtenemos $a_2 = 6436 kms$.

Error absoluto: $E_2 = 6437 - 6436 = 1 kms$.

Error relativo: $e_2 = 6437 - 6436 = 1,5535 \cdot 10^{-4}$.

Cifras significativas: 3

# Fuentes de error

(E1) Error humano. Son aquellos que se producen por ejemplo, por errores en operaciones, transcripción de datos, o al programar.

(E2) Error en el modelado. Los modelos matemáticos que se utilizar para modelar el mundo físico no son siempre exactos.

(E3) Error de medición. Debido al margen de error de los aparatos de medición.

(E4) Error por la aritmética de coma flotante.

(E5) Error de aproximación matemática.

# Aritmética de coma flotante en Doble Precisión

Un número real en notación científica se escribe como $\pm m \cdot 10^a$, donde $1 \leq m < 10$ es la mantisa y $a \in \mathbb{Z}$ es el exponente.

En un ordenador se guarda como:

$$\pm m 2^e$$

la mantisa $m$ es un número entero (entre 0 y $1 + (1 - 2^{-52})$) y el exponente $e$ como otro número entero (entre $-1022$ y $1023$).

El número más grande es

$$(1 + (1 - 2^{-52})) \times 2^{1023} \approx 1.7976931348623157 \times 10^{308}$$

y el más pequeño (positivo)

$$2^{-1022} \approx 2.2250738585072014 \times 10^{-308}$$

# Error de redondeo

Los **errores de coma flotante** o **errores de redondeo** se producen porque el ordenador no puede almacenar las infinitas cifras de un número real.

Cada vez que el ordenador realiza una operación en coma flotante, si el número no es exacto en el formato anterior guarda una aproximación, lo que se conoce como **error de redondeo**.

Si calculamos $1/5$, el valor que guardará es:

$$1/5 = 0.20000000000000001$$

(recuérdese que realiza los cálculos en binario y $1/5$ no tiene división exacta).

# Error de aproximación matemática

Los **errores de aproximación** o **errores de truncamiento** son debido a la imposibilidad de evaluar de modo exacto muchas funciones (exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas, etc)

Para evaluar $e^x$, el ordenador sustituye la función por una aproximación suya mediante el polinomio de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}e^{\xi}, \quad \xi \in (0, x).$$

Al descartar el último término se produce un error.

# Propagación de errores

Al operar con dos aproximaciones que tienen un cierto error, los errores se propagan, aumentando en algunos casos (y disminuyendo en otros).

Si sumamos dos números $a_1$, $a_2$ con errores $E_1, E_2$, entonces

$$r_1 + r_2 = a_1 + E_1 + a_2 + E_2 = (a_1 + a_2) + E_1 + E_2,$$

es decir, los errores se suman. Y si los multiplicamos:

$$r_1 r_2 = (a_1 + E_1)(a_2 + E_2) = (a_1 a_2) + (E_1 a_2 + E_2 a_1 + E_1 E_2) \approx (a_1 a_2) + (E_1 a_2 + E_2 a_1)$$

Descartando $E_1 E_2$, tenemos que el error es el resultado de multiplicar el primer error por el segundo y el segundo por el primero.

# Propagación de errores

Vamos a calcular cómo se propaga el error cuando componemos con una función.

Consideremos que nuestro valor aproximado es $a$, el valor real $r$ y el error $E$ ($r = a + E$) y que $f$ es una función analítica.

Queremos obtener el error al aproximar $f(r)$ por $f(a)$. Usando el polinomio de Taylor:

$$f(r) = f(a+E) = f(a) + Ef'(a) + \frac{E^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, r).$$

Despreciando $E^2$ (suponiendo que $f'(a) \neq 0$), tenemos que:

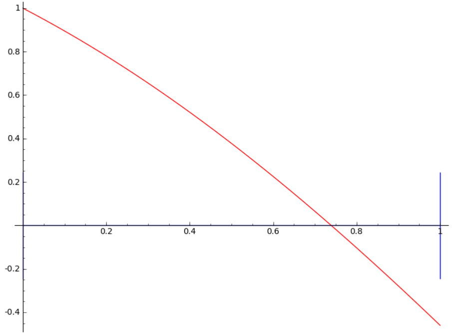
$$f(r) = f(a+E) \approx f(a) + Ef'(a).$$

Es decir, el error se multiplica por $f'(a)$.

Si $f'(a) = 0$ tendríamos que considerar el siguiente término del polinomio de Taylor.

# Cálculo de los ceros de una función

# Planteamiento del problema




Tenemos una función $f(x)$ **continua** en un intervalo $[a, b]$.

Se cumple que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos en el intervalo.

Entonces el Teorema de Bolzano nos asegura la existencia de una raíz.

Los métodos de dos puntos tratan de reducir la anchura del intervalo manteniendo el cambio de signo.

# Método de la bisección

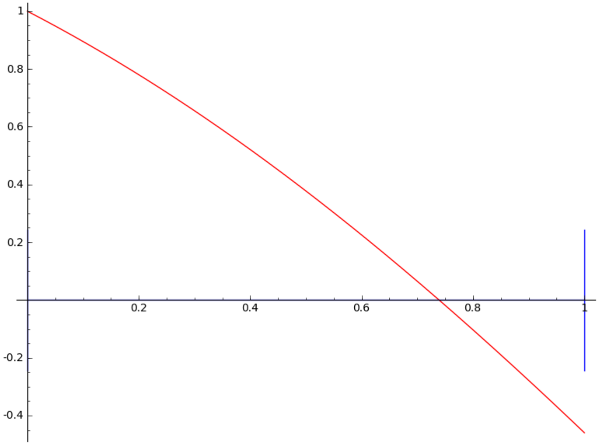
El algoritmo de la bisección es el siguiente:

1. Calculamos $c = \dfrac{a+b}{2}$, el punto medio del segmento $[a, b]$.
2. Calculamos $f(c)$ y lo comparamos con $f(a)$ y $f(b)$.
   - Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen distinto signo, tomamos $[a, c]$ como nuevo segmento y volvemos al paso 1.
   - Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, tomamos $[c, b]$ como nuevo segmento y volvemos al paso 1.
3. Repetimos el proceso tantas veces como sea necesario hasta estar en el margen de error fijado.
   - Podemos establecer un error máximo permitido (0.01, 0.005, 0.0001,...)
   - o bien una precisión de $d$ cifras decimales (equivale a un error máximo de $0.5 \cdot 10^{-d}$).

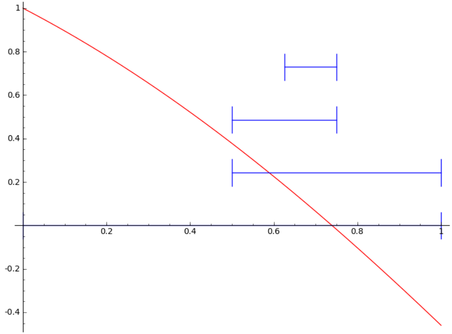
# Método de la bisección

**Ejemplo 1:** $f(x) = -x + \cos(x)$, $[a, b] = [0, 1]$.

$f(a) = 1$, $f(b) = -0.459698$



# Método de la bisección




**Ejemplo 1:** $f(x) = -x + \cos(x)$, $[a, b] = [0, 1]$.

$f(a) = 1$, $f(b) = -0.459698$

- $c$=0.5, $f(c) = 0.377582$
  $[a, b]$=[0.5,1].
- $c$=0.75, $f(c) = -0.018311$,
  $[a, b]$=[0.5,0.75].
- $c$=0.625, $f(c) = 0.185963$,
  $[a, b]$=[0.625,0.75].

# Error del método de la bisección

- Si partimos de un intervalo $[a, b]$, el error que estamos cometiendo es $E_0 = b - a$.
- Tomamos $c = (a + b)/2$ y pasamos a uno de los intervalos $[a, c]$ ó $[c, b]$. En cualquier caso, el error es la mitad que el anterior: $E_1 = E_0/2 = \frac{b-a}{2}$.
- Si hacemos $n$ iteraciones:

$$E_n = \frac{E_{n-1}}{2} = \frac{E_{n-2}}{2^2} = \ldots = \frac{E_0}{2^n}, \qquad \boxed{E_n = \frac{b-a}{2^n}}$$

De este modo, podemos calcular el número de iteraciones necesarias para conseguir cierta precisión T, imponiendo que $\dfrac{b-a}{2^n} \leq T$ y despejando $n$ en función de $T$.

# Error del método de la bisección

**Ejemplo 1:** *Queremos estimar el valor de la raíz de* $f(x)$*, con un error menor que* $5 \cdot 10^{-4}$. Imponemos entonces

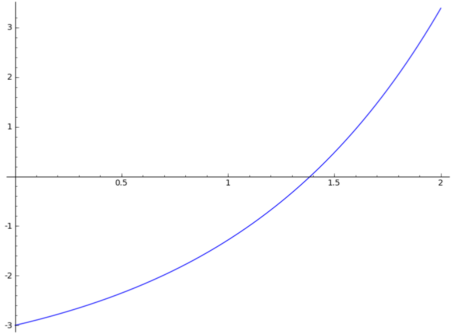
$$\frac{b-a}{2^n} \leq 0.5 \cdot 10^{-3} \rightarrow \ \frac{1}{2^n} \leq 0.0005$$

$$2^n \geq 1/0.0005 = 2000 \ \rightarrow n \geq 10.97 \ \rightarrow n = 11$$

Tenemos que hacer 11 iteraciones del algoritmo de bisección.
Otra forma de estimar el error que estamos cometiendo es ir calculando las diferencias entre los puntos medios de los intervalos: $E_0 = b - a = 1$,

$E_1 = 1/2 = 0.5, \ E_2 = 0.75 - 0.5 = 0.25, \ E_3 = 0.75 - 0.625 = 0.125, \ldots$

# Planteamiento del problema




Tenemos una función $f(x)$ **continua** y un punto inicial $x_0$.

Queremos calcular un cero de $f(x)$ próximo a $x_0$.

Los métodos de un punto tratan de obtener el cero utilizando información sobre la derivada.

# Método de Newton

Partimos de una función $f(x)$ y un punto inicial $x_0$.

Calculamos el siguiente punto $x_1$ como el punto en el que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ corta el eje $x$.

La ecuación de la tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Imponemos que corte el eje $x$:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

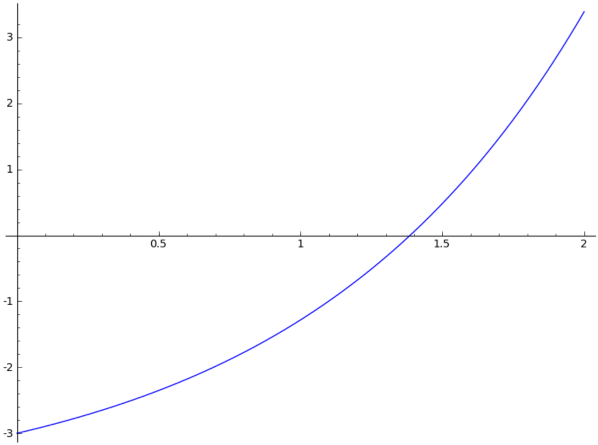
Despejando $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

Repitiendo el proceso, $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$.

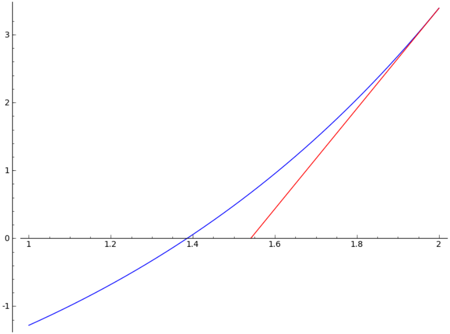
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)}$$

# Método de Newton: ejemplo

$f(x) = e^x - 4$, $x_0 = 2$



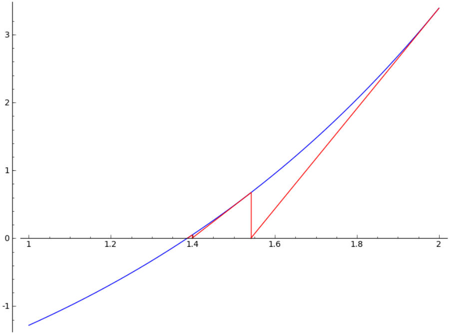
# Método de Newton: ejemplo




$f(x) = e^x - 4$, $x_0 = 2$.

- $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 1.54134113294645$

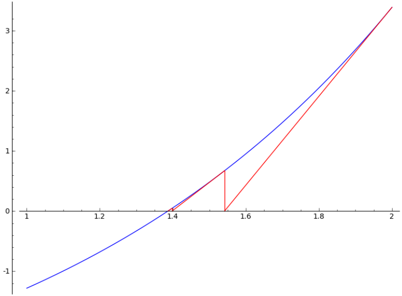
# Método de Newton



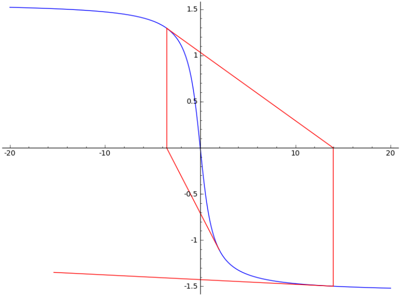

$f(x) = e^x - 4$, $x_0 = 2$.

- $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 1.5413411329464$5
- $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1.39771625526465$
- $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1.38635934331094$
- En este caso, podemos calcular la solución exacta: $x_4 = \log(4) = 1.38629436111989$

# Convergencia del método




Convergente




No convergente

# Convergencia

## Teorema

*Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ (segunda derivada continua en $[a,b]$), de la cual sabemos que posee una raíz $r$ en $[a,b]$.*

*Si $f'(r) \neq 0$, entonces existe un intervalo centrado en $r$ tal que la sucesión $\{x_n\}$ del método de Newton-Raphson converge a la raíz, siempre que el punto inicial $x_0$ se encuentre dentro de dicho entorno.*

## Proposición

*Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, con una raíz $r$ en $[a,b]$.*

*Si $f'(r) > 0$, $f''(x) > 0$ ($f$ es estrictamente creciente en $r$ y convexa) para todo $x \in [a,b]$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a $r$ para todo valor inicial $x_0$.*

*Analogamente si $f'(r) < 0$ y/o $f''(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$ ($f$ estrictamente decreciente y cóncava).*

# Error

## Teorema

*Denotemos como $E_n$ el error en el paso n-ésimo del método de Newton-Raphson. Entonces existe un valor $\xi_n$ comprendido entre $x_n$ y $r$, tal que*

$$E_{n+1} = \frac{-f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} E_n^2.$$

Entonces, si $\bar{x}$ es la solución y $x_n$ es la sucesión dada por el método de Newton-Raphson

$$|x_{n+1} - x_n| = |\bar{x} + E_{n+1} - (\bar{x} + E_n)| = \left| \frac{-f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} E_n - 1 \right| |E_n|.$$

Por tanto, si $f'(x_n)$ no es excesivamente pequeño, entonces

$$|E_n| \approx |x_{n+1} - x_n|.$$

# Método de la secante

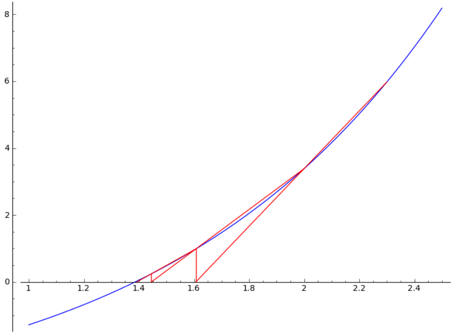
Partimos de una función $f(x)$ y de dos puntos iniciales $x_0, x_1$. Calculamos el siguiente punto $x_2$ como el punto en el que la recta (secante) determinada por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ corta el eje $X$.
La ecuación de la secante es:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Imponemos que corte el eje $X$: $0 - f(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2 - x_0)$
Despejando,
$x_2 = x_0 - f(x_0)\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$
Repitiendo el proceso,

$$\boxed{x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}}$$

# Método de la secante




$f(x) = e^x - 4, \; x_0 = 2.3, \; x_1 = 2.$

- $x_2 = \frac{f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1}{f(x_1) - f(x_0)} = 1.606705$
- $x_3 = \frac{f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2}{f(x_2) - f(x_1)} = 1.445250$
- $x_4 = \frac{f(x_3)x_2 - f(x_2)x_3}{f(x_3) - f(x_2)} = 1.392496$
- Recordemos la solución exacta: $\bar{x} = \log(4) = 1.38629436111989$

# Método del punto fijo

El objetivo es obtener un **punto fijo** de una función $F(x)$ dada, es decir, un valor $\bar{x}$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{x}$.

El problema de calcular un cero de $f(x)$ se puede transformar en obtener un punto fijo de una función $F(x)$ (la transformación no es única).

Partimos de una función $F(x)$ y de un punto inicial $x_0$.

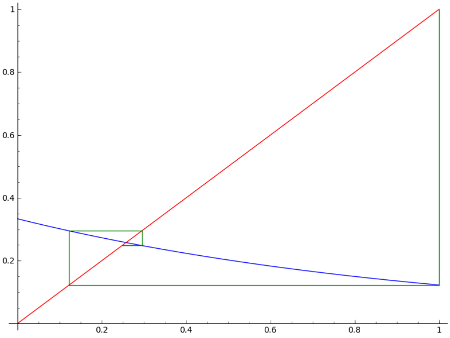
Calculamos el siguiente punto $x_1$ como la imagen por $F$ de $x_0$.

$$x_1 = F(x_0)$$

Repitiendo el proceso,

$$\boxed{x_n = F(x_{n-1})}$$

# Método del punto fijo




$f(x) = -3x + e^{-x}$ $F(x) = e^{-x}/3$ (gráfica azul), $x_0 = 1$.
La gráfica roja es la identidad, el punto buscado es aquel en el que se cortan.

- $x_1 = F(x_0) = 0.122626$
- $x_2 = F(x_1) = 0.294865$
- $x_3 = F(x_2) = 0.248211$

Los segmentos verdes unen los puntos de la sucesión calculada: $(x_0, F(x_0))$ y $(F(x_0), F(x_0))$

# Convergencia y error

## Teorema

*Supongamos que* $F \in \mathcal{C}([a,b])$.

1. *Si* $F(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces* $F$ *tiene un punto fijo en* $[a,b]$.
2. *Si además* $F'(x)$ *está definida y es continua en* $(a,b)$ *y* $|F'(x)| < 1$ *para todo* $x \in (a,b)$, *entonces* $F$ *tiene un único punto fijo* $\bar{x}$ *en* $[a,b]$.

# Convergencia y error

## Teorema

*Supongamos que* $F \in \mathcal{C}([a, b])$ *verifica:*

1. $F(x) \in [a, b]$ *para todo* $x \in [a, b]$.
2. $F'(x)$ *está definida y es continua en* $(a, b)$ *y* $|F'(x)| \leq K < 1$ *para todo* $x \in (a, b)$.
3. $x_1 \in [a, b]$.

*Sea* $E_n = |\bar{x} - x_n|$, *donde* $\bar{x}$ *es el único punto fijo de* $F$ *y* $x_n$ *está definido recursivamente por* $x_n = F(x_{n-1})$. *Entonces*

$$E_{n+1} \leq K^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - K}.$$

# Convergencia y error

Comparemos estos tres ejemplos de problemas de punto fijo.

1. $F(x) = \cos(x)$, $x_0 = 1$

   $|F'(x)| = |-\sin(x)| < 1, x \in (0,1) \Rightarrow$ El método SI converge
2. $F(x) = x^3 - 1$, $x_0 = 1$

   $|F'(x)| = |3x^2|$, que no está acotado por 1 en $(0,1)$, pues $F'(1) = 3$

   $\Rightarrow$ El método no converge
3. $F(x) = (1+x)^{1/3}$, $x_0 = 1$

   $|F'(x)| = \left|1/3(1+x)^{-2/3}\right| < 1/3$ en $(0,1)$, (pues es decreciente) $\Rightarrow$ El método SI converge

# Resolución de sistemas de ecuaciones

# Planteamiento del problema

Sea un sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\\
&a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{aligned}
$$

- $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ son los coeficientes del sistema, conocidos.
- Matriz del sistema: $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{mxn}$
- Vector de términos independientes: $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Vector de variables: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

# Planteamiento del problema

Este tipo de sistemas aparecen en multitud de aplicaciones como:

- Procesamiento de señales
- Simulación
- Análisis y procesamiento de datos espaciales

En la asignatura de Álgebra, hemos estudiado cómo resolverlos mediante métodos directos:

- Regla de Cramer
- Método de Gauss

Sin embargo, los métodos directos producen inconvenientes cuando se aplican a sistemas de grandes dimensiones, pues requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo.
Los métodos iterativos están especialmente inidicados en la resolución de este tipo de sistemas, o en aquellos en las que las matrices son dispersas (poseen muchos ceros).

# Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

En este tema, estudiaremos cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante:

1. Nuevos métodos directos:
    1. Método de Gauss con pivoteo parcial
2. Métodos iterativos:
    1. Método de Jacobi
    2. Método de Gauss-Seidel

# Métodos directos: Gauss con pivoteo parcial

El método de Gauss consiste en transformar el sistema en uno equivalente, de modo que la matriz del sistema sea triangular superior: es decir, que

$$a_{ij} = 0, \quad i > j$$

$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Si $a_{11} \neq 0$, la primera fila pivote es la $F_1$. Las modificaciones en la matriz ampliada son:

$$F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1, \;\; F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} F_1, \;\; \dots$$

Después, hacemos lo mismo con la fila siguiente, hasta lograr la matriz triangular superior. Este proceso se denomina **eliminación gaussiana**.

# Ejemplo Gauss

**Ejemplo 1:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3-5F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4-3F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

# Ejemplo Gauss

Una vez que tenemos el sistema con matriz triangular superior:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

Basta resolverlo de "abajo hacia arriba": **sustitución regresiva**

$$-8x_4 = -2 \to x_4 = 1/4$$

$$-12x_3 = -2 \to x_3 = 1/6$$

$$2x_2 + 4x_4 = 2 \to x_2 = 1/2(2 - 4 \cdot 1/4) = 1/2$$

$$x_1 = 1 - 3x_3 = 1/2$$

# Ejemplo pivoteo parcial

El **pivoteo parcial** consiste en aplicar este método eligiendo la fila pivote como aquella cuyo elemento pivote sea el de mayor valor absoluto de su columna. Una vez elegida, se intercambian las filas como sea necesario.

**Ejemplo 2:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & 2 \\ 2 & 0 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 1 & 2 & 0 & | & 2 \\ 1 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -8/3 & | & 2/3 \end{pmatrix}$$

# Métodos Iterativos

Los métodos directos que hemos estudiado tienen inconvenientes si se aplican a sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones, porque requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo.

Los métodos iterativos están especialmente inidicados en la resolución de este tipo de sistemas, o en aquellos en las que las matrices son dispersas (poseen muchos ceros).

Consisten en definir una sucesión de puntos $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, ... que converjan a la sucesión del sistema. Se basan en la versión para variables $n$-dimensionales del método del punto fijo. Para ello utilizamos que $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \leftrightarrow (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$$

# Método de Jacobi

El **método de Jacobi** consiste en que la expresión para la función de punto fijo $\mathbf{F}(x)$ la obtenemos despejando de cada ecuación una incógnita.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x + 6y - 2z &= 15 \\ 4x - 3y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

Despejamos $x$ de la primera ecuación, $y$ de la segunda, $z$ de la tercera:

$$\begin{aligned} 2x &= y + 9 \\ 6y &= -x + 2z + 15 \\ 8z &= -4x + 3y + 1 \end{aligned}$$

Y partiendo de un punto inicial $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$ calculamos el siguiente mediante estas ecuaciones.

# Método de Jacobi

Partiendo de $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x_1}$ se calcula:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

con lo cual $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (4.5, 2.5, 0.125)$
De forma análoga vamos calculando más puntos de la sucesión:

- $\mathbf{x}_2 = (5.75, 1.7916667, -1.1875)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.3958333, 1.14583333, -2.078125)$
- $\mathbf{x}_4 = (5.07291667, 0.90798611, -2.14322917)$

que convergen a la solución real, que en este caso, es $(5, 1, -2)$

# Método de Gauss-Seidel

En lugar de despejar una incógnita, transformamos el sistema en uno triangular:

$$\begin{aligned} 2x &= y + 9 \\ x + 6y &= 2z + 15 \\ 4x - 3y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

Partiendo de $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x_1}$ se calcula:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \Rightarrow x_1 = 4.5 \\ 6y_1 &= -x_1 + 2z_0 + 15 = -4.5 + 15 \Rightarrow y_1 = 1.75 \\ 8z_1 &= -4x_1 + 3y_1 + 1 = -4 * 4.5 + 3 * 1.75 + 1 \Rightarrow z_1 = -1.46875 \end{aligned}$$

con lo cual

- $\mathbf{x}_1 = (4.5, 1.75, -1.46875)$
- $\mathbf{x}_2 = (5.375, 1.11458333, -2.14453125)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.05729167, 0.94227430, -2.05029297)$
- $\mathbf{x}_4 = (4.97113715, 0.98804615, -1.99005127)$

que convergen más rápidamente que con Jacobi a la solución real $(5, 1, -2)$

# Método de Jacobi

El **método de iteración de Jacobi** consiste en definir

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \ \ \mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

donde

- $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal con la misma diagonal que $\mathbf{A}$
- $\mathbf{L}$ es la matriz tal que $l_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ y $l_{ij} = 0$ en caso contrario.
- $\mathbf{U}$ es la matriz tal que $u_{ij} = a_{ij}$ si $i > j$ y $u_{ij} = 0$ en caso contrario.

con lo cual $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$, y el sistema $\mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$ es equivalente a resolver $\mathbf{Dx} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial $\mathbf{x}_0$ y definiendo

$$\mathbf{Dx}_{k+1} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \ \ k \geq 0$$

# Ejemplo de Métodos iterativos

**Ejemplo 4:** Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 9 \\ x+6y-2z & = & 15 \\ 4x-3y+8z & = & 1 \end{array}, \text{ con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de un valor inicial

$$\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$$

# Ejemplo de Métodos iterativos

El método de Jacobi consiste en definir

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \;\; k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ 6y_{k+1} &= -x_k + 2z_k + 15 \\ 8z_{k+1} &= -4x_k + 3y_k + 1 \end{aligned}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$, $$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

# Ejemplo de Métodos iterativos

Para el método de Jacobi, tenemos:

- $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$
- $\mathbf{x}_1 = (4.5, 2.5, 0.125)$
- $\mathbf{x}_2 = (5.75, 1.7916667, -1.1875)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.3958333, 1.14583333, -2.078125)$
- $\mathbf{x}_4 = (5.07291667, 0.90798611, -2.14322917)$

Nótese que, en este caso, el sistema es resoluble, y la solución real es $(5, 1, -2)$, hacia la cual converge la sucesión creada por el método.

# Método de Gauss-Seidel

El **método de iteración de Gauss-Seidel** consiste en definir

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \ \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

con lo cual el sistema $\mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$ es equivalente a resolver

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} = -\mathbf{Ux} + \mathbf{b}$$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial $\mathbf{x}_0$ y definiendo

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \ k \geq 0$$

# Ejemplo de Métodos iterativos

El método de Gauss-Seidel consiste en definir

$$(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \;\; k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{lcl} 2x_{k+1} & = & y_k + 9 \\ x_{k+1} + 6y_{k+1} & = & 2z_k + 15 \\ 4x_{k+1} - 3y_{k+1} + 8z_{k+1} & = & 1 \end{array}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$, $\begin{array}{lcl} 2x_1 & = & y_0 + 9 \\ 6y_1 & = & -x_1 + 2z_0 + 15 \\ 8z_1 & = & -4x_1 + 3y_1 + 1 \end{array}$

# Ejemplo de Métodos iterativos

Para el método de Gauss-Seidel, tenemos:

- $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$
- $\mathbf{x}_1 = (4.5, 1.75, -1.46875)$
- $\mathbf{x}_2 = (5.375, 1.11458333, -2.14453125)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.05729167, 0.94227430, -2.05029297)$
- $\mathbf{x}_4 = (4.97113715, 0.98804615, -1.99005127)$

# Convergencia de los métodos iterativos

Decimos que una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es diagonalmente dominante si

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j \neq k}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

## Teorema

*Dado el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:*

- *Si $\mathbf{A}$ es diagonalmente dominante, o*
- *si $\mathbf{A}^\top$ es diagonalmente dominante, o*
- *si $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva*

*entonces existe una única solución del sistema y los métodos iterativos producen una sucesión de vectores que converge a dicha solución.*

# Normas de vectores y matrices

Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, se definen las siguientes normas:

1. Norma euclídea: $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$.
2. Norma infinito: $\|\mathbf{v}\|_\infty = \sup\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$
3. Norma uno: $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + \ldots + |v_n|$.

Para calcular la distancia entre dos puntos $A, B$, utilizamos $\|B - A\|$.

Por ejemplo, La distancia de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$:

- Con la norma euclídea es $\sqrt{2}$ (distancia en línea recta).
- Con la norma infinito es 1 (la mayor de las distancias coordenada a coordenada).
- Con la norma uno es 2 (distancia "Manhattan" es decir, moviendose sólo en horizontal y vertical).

# Normas de matrices

Consideremos una norma vectorial $\|\cdot\|$. Se define la norma matricial asociada como:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}.$$

Propiedades:

- $\|A\| \geq 0$.
- $\|cA\| = |c|\|A\|$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Además, para cada vector $v$, $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.

# Error relativo

Fijemos una de las normas anteriores y sea **u** un vector de $\mathbb{R}^n$ y **v** una aproximación. Se denomina **error relativo** (con la norma fijada) a

$$\frac{\|u - v\|}{\|u\|}.$$

**Ejemplo:**
Con la norma uno, si el valor real es $(1, 2, 3)$ y medimos $(1.1, 1.8, 3.1)$, el error relativo es

$$\frac{\|(1,2,3) - (1.1, 1.8, 3.1)\|_1}{\|(1,2,3)\|_1} = \frac{0.1 + 0.2 + 0.1}{1 + 2 + 3} = 0.03333.$$

# Condicionamiento

Supongamos el sistema de ecuaciones lineales con la siguente matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 400 & -201 & 100 \\ -800 & 401 & -200 \end{array}\right)$$

cuya solución es $(0.25, 0)$. Si modificamos ligeramente los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 400 & -201 & 101 \\ -800 & 401 & -198 \end{array}\right)$$

la solución varía enormemente: $(-1.7575, -4.0)$

# Condicionamiento

El condicionamiento de uns sistema se estudia mediante el **número de condición**. Fijada una norma,

$$k(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \sup\{\|Ax\| \colon \|x\| = 1\} \sup\{\|A^{-1}x\| \colon \|x\| = 1\}.$$

Cuanto mayor sea el número de condición de la matriz de un sistema, peor será el condicionamiento del sistema. Teniendo en cuenta que $k(A) \geq 1$, cuanto más cercano sea dicho valor a 1, mejor estará condicionado.

## Teorema

*Fijemos una norma y supongamos que* $\bar{\mathbf{b}}$ *es una aproximación del vector* $\mathbf{b}$*.*

*Denotemos* $e_b$ *el error relativo de aproximar* $\mathbf{b}$ *por* $\bar{\mathbf{b}}$ *y denotemos* $e_x$ *el error relativo de aproximar* $\mathbf{x}$ *por* $\bar{\mathbf{x}}$*, solución del sistema* $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$*.*

*Entonces*

$$e_b / k(\mathbf{A}) \leq e_x \leq k(\mathbf{A}) e_b.$$

# Número de condición

**Ejemplo:** Consideremos el sistema $Ax = b$, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué error relativo tiene la aproximación $x_1 = (4.97, 0.988, -1.99)$?

Denotamos $b_1 = \mathbf{A}x_1$. Entonces

$$\mathbf{A}(x - x_1) = b - b_1 = (0.048, 0.122, 0.004).$$

Luego

$$\frac{\|x - x_1\|}{\|x\|} \leq k(\mathbf{A}) \frac{\|b - b_1\|}{\|b\|} = 0.049676889153417295.$$

(Con la norma euclídea)

# Sistemas no lineales

Supongamos ahora que queremos resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

Denotamos $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.
Queremos aplicar el método de Newton a estos sistemas. Para ello partimos de un vector $\mathbf{x_0}$ y tomamos

$$\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_n} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_n)F(\mathbf{x}_n)$$

donde $\mathbf{J}$ es la matriz Jacobiana de $F$. La ecuación equivale al sistema lineal:

$$\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{x_n})(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -F(\mathbf{x}_n)}$$

# Ejemplo de sistemas no lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$x^3 - y^2 = 0,$$
$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

Tomamos $x_0 = (1,1)$. Calculamos $x_d = x_1 - x_0$ como la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, $x_d = (-1/4, -3/8)$, por lo que $x_1 = x_0 + x_d = (3/4, 5/8)$.
Repitiendo el proceso, ahora con $x_1$, obtenemos $x_2 = (2/3, 43/80)$.

# Ejemplo de sistemas no lineales