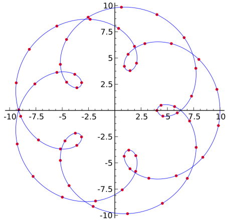
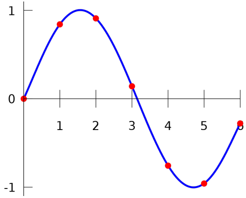
Planteamiento del problema





La **interpolación** consiste en construir una función (o una curva) que pase por una serie de puntos prefijados.

- **Interpolación polinomial**: el conjunto de datos observados se interpola mediante el polinomio de menor grado que pase por todos los puntos.
- **Interpolación a trozos (splines)** cada par de puntos consecutivos se interpola mediante un polinomio.

Planteamiento del problema

Dados los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), existe un único polinomio de grado $\leq n$, $P_n(x)$ tal que

$$P_n(x_k) = y_k,\ \ k = 0, 1, \dots, n$$

al cual llamamos **polinomio interpolador de los puntos**.

Para calcularlo, definimos $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, e imponemos $P_n(x_k) = y_k, k = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Se prueba que el determinante es no nulo. Por tanto, el polinomio interpolador es único.

Ejemplo 1

Consideremos los puntos:

$$(0,4)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,4)$$

Tenemos que resolver el sistema:

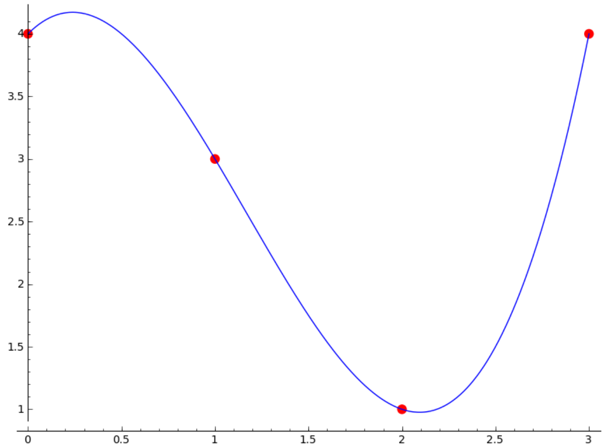
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos y obtenemos

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 4.0 + 1.5\,x - 3.5\,x^2 + x^3.$$

Ejemplo 1

Si dibujamos el polinomio interpolador y los puntos:



Polinomio Interpolador de una curva

Si tomamos (x_k, y_k), pertenecientes a la gráfica de una función f, $y_k = f(x_k)$.

Teorema

Dada $f \in \mathcal{C}^{n+1}([x_0, x_n])$, si $P(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$, entonces existe $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$f \in \mathcal{C}^{n+1}([x_0, x_n])$ quiere decir que la función f es $n+1$ veces derivable en $[x_0, x_n]$, y que dicha derivada $n+1$ es continua en $[x_0, x_n]$.

Veremos dos métodos para calcular el polinomio interpolador, además de la resolución del sistema de ecuaciones lineales.

1. Método de Lagrange
2. Método de Newton

Ejemplo 2

Consideremos la función

$$f(x) = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) + 4.$$

Se verifica $f(0) = 4, \quad f(1) = 3, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 4$. Por tanto su polinomio de interpolación es

$$P_3(x) = 4.0 + 1.5\,x - 3.5\,x^2 + x^3.$$

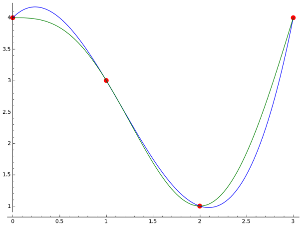


Figura: Función y polinomio

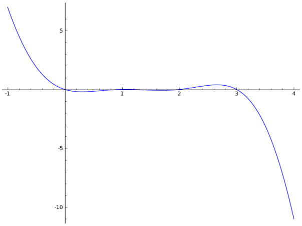


Figura: error

1. Polinomios de Lagrange

Dados $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, se definen los **polinomios de Lagrange** como

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$L_i(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_i, 1)$ y $(x_j, 0)$, para $j \neq i$.

El polinomio interpolador de (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) es

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$$

1. Polinomios de Lagrange

Consideremos los puntos:

$$(0,4)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,4)$$

Tenemos:

$$L_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}, \quad L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}, \quad L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Y

$$P_3(x) = 4 * L_0(x) + 3 * L_1(x) + 1 * L_2(x) + 4 * L_3(x).$$

2. Interpolación de Newton

Dada una función $f(x)$, se definen las **diferencias divididas** de $f(x)$ como

$$f[x_k] = f(x_k), \quad f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}},$$
$$f[x_{k-r}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-r+1}, \ldots, x_k] - f[x_{k-r}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-r}}.$$

El polinomio interpolador de los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), puede escribirse usando las diferencias divididas como

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}).$$

2. Interpolación de Newton

Ejemplo 3:

$$(0,4)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,4)$$

Creamos la tabla de diferencias divididas:

x	f[ ]	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
0	4			
		-1		
1	3		-1/2	
		-2		1
2	1		5/2	
		3		
3	4			

2. Interpolación de Newton

Ejemplo 3:

$$(0,4)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,4)$$

Creamos la tabla de diferencias divididas:

x	f[ ]	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
0	4			
		-1		
1	3		-1/2	
		-2		1
2	1		5/2	
		3		
3	4			

2. Interpolación de Newton

Ejemplo 3:

$$(0,4)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,4)$$

Creamos la tabla de diferencias divididas:

x	f[ ]	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
0	4			
		-1		
1	3		-1/2	
		-2		1
2	1		5/2	
		3		
3	4			

2. Interpolación de Newton

Ejemplo 3:

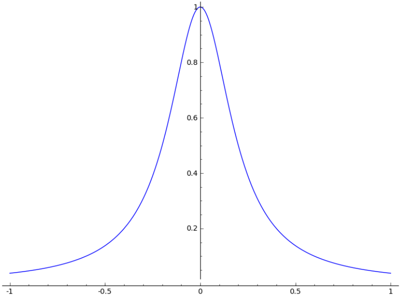
x	f[ ]	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
0	$\boxed{4}$			
		$\boxed{-1}$		
1	3		$\boxed{-1/2}$	
		-2		$\boxed{1}$
2	1		$5/2$	
		3		
3	4			

$$P(x) = 4 - x - (1/2)x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Efecto de Runge-Kutta

El ajuste de una curva mediante polinomios de interpolación de grado alto, esto es, para un conjunto numeroso de datos, suele resultar poco satisfactoria, pues produce oscilaciones en los extremos que llevan a graves errores (efecto Runge-Kutta). Tomemos

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \ x \in [-1, 1]$$



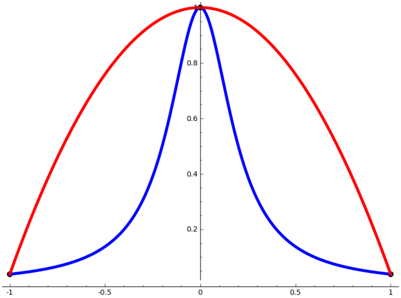
Efecto de Runge-Kutta

$f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ es la curva azul.
Tomamos los puntos

$$(-1, 0.0385), (0, 1), (1, 0.0385)$$

y calculamos el polinomio interpolador de los mismos.

$$P_2(x) = -0.9615x^2 + 1(\text{gráfica roja})$$



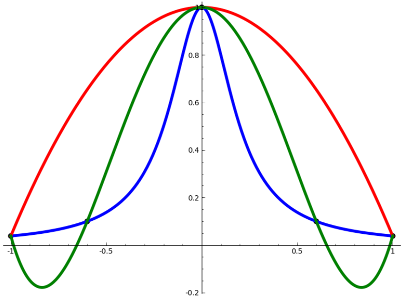
Efecto de Runge-Kutta

Tomamos más puntos para interpolar. Añadimos

$$(-0.6, 0.1), (0.6, 0.1)$$

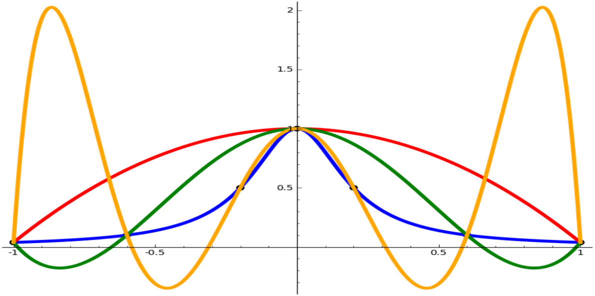
El polinomio interpolador es de grado 4:

$$P_4(x) = 2.4038x^4 - 3.3654x^2 + 1(\text{verde})$$



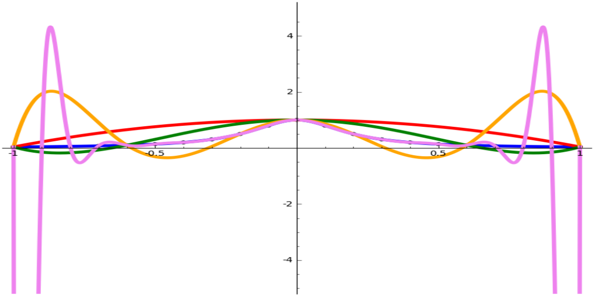
Efecto de Runge-Kutta

Tomando más puntos para interpolar, el polinomio de grado 6 se representa en la gráfica naranja. Como vemos, aparecen fluctuaciones en los extremos que hacen que el ajuste no sea adecuado, pues se producen muchos errores.



Efecto de Runge-Kutta

Para un total de 21 puntos, las fluctuaciones son enormes (el polinomio de interpolación en este caso es la gráfica violeta)



Interpolación polinomial a trozos: splines

La interpolación polinomial a trozos consiste en construir un polinomio de grado 1, 2 o 3 para cada par de nodos consecutivos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) La curva definida mediante estos "trozos" se denomina **spline**. Estudiaremos:

1. Interpolación lineal a trozos: splines lineales
2. Interpolación cúbica a trozos: splines cúbicos

Splines lineales

Consisten simplemente en unir los nodos o puntos mediante segmentos. Así, dado el par de nodos $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$, definimos el segmento que los une:

$$S_k(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), \ \ x \in [x_k, x_{k+1}]$$

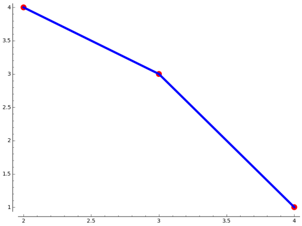
con lo que el spline lineal de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ es la función definida a trozos:

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_k, x_{k+1}], \ \ k = 0, \ldots, n-1$$

Splines lineales

Ejemplo 4 Queremos interpolar los puntos $(2,4),(3,3),(4,1)$. Tomamos el spline lineal:

$$s(x) = \begin{cases} -x+6 & \text{si } x \in (2,3) \\ -2\,x+9 & \text{si } x \in (3,4) \end{cases}$$



Splines cúbicos

En el caso de que busquemos una curva más suave, debemos usar un spline cúbico, imponiendo que sea una función con segunda derivada continua. Se define la curva en $[x_0, x_n]$ a trozos

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_{k-1}, x_k],\ \ k = 0, \ldots, n-1$$

donde $S_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k,\ k = 0, \ldots, n-1.$
Se debe cumplir que:

1. $S_k(x_k) = y_k,\ S_k(x_{k+1}) = y_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$ cada trozo de spline pasa por los nodos correspondientes
2. $S_k'(x_{k+1}) = S_{k+1}'(x_{k+1}),\ k = 0, \ldots, n-2$ en los nodos donde los trozos se unen la derivada es la misma, es decir, no hay picos
3. $S_k''(x_{k+1}) = S_{k+1}''(x_{k+1}),\ k = 0, \ldots, n-2$ en los nodos donde los trozos se unen hay igual radio de curvatura, pues este coeficiente se define únicamente a partir de la derivada segunda

Splines cúbicos

Para encontrar una solución del sistema, formado por $4n-2$ ecuaciones y $4n$ incógnitas, debemos imponer dos restricciones más. Según la forma de imponerlas, podemos definir distintos tipos de splines.

1. Spline cúbico natural: este spline cúbico es el que minimiza la energía de tensión.
$$S''(x_0) = 0, \quad S''(x_n) = 0.$$
2. Spline periódico:
$$S'(x_0) = S'(x_n), \quad S''(x_0) = S''(x_n)$$
3. Spline cúbico sujeto (el que menos oscila)
$$S'(x_0) = d_0, \quad S'(x_n) = d_n$$

Splines cúbicos

Ejemplo 5 Spline cúbico natural que interpola $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,1)$.

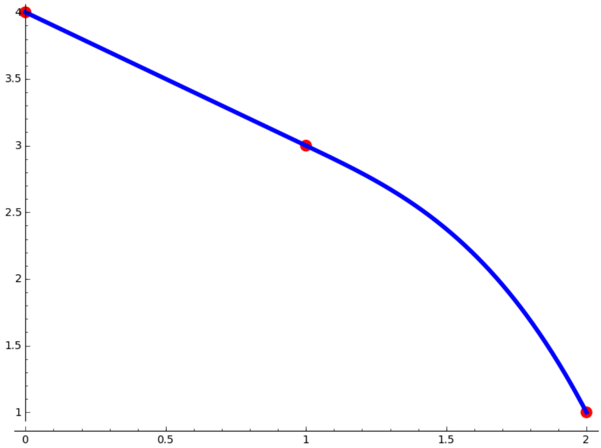
Tenemos el sistema

$$\begin{array}{r} S_0(0)=4 \rightarrow \\ S_0(1)=3 \rightarrow \\ S_1(1)=3 \rightarrow \\ S_1(2)=1 \rightarrow \\ S_0'(1)=S_1'(1) \rightarrow \\ S_0''(1)=S_1''(1) \rightarrow \\ S_0''(0)=0 \rightarrow \\ S_1''(2)=0 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ c_0 \\ b_0 \\ a_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_0(x) = 4 - x, \quad S_1(x) = 5 - 4x + 3x^2 - x^3.$$

Splines cúbicos

Ejemplo 5



Interpolación en curvas

Supongamos que tenemos una curva parametrizada:

$$(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}$$

Conocidos los puntos o nodos de la curva

$$(x(t_0), y(t_0)), (x(t_1), y(t_1)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))$$

queremos buscar una curva que pase por los mismos.

1. Interpolamos los nodos

$$(t_0, x(t_0)), (t_1, x(t_1)), \ldots, (t_n, x(t_n))$$

obteniendo una expresión para $x(t)$

2. Interpolamos los nodos

$$(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$$

obteniendo una expresión para $y(t)$

Interpolación en curvas

La interpolación de curvas la podemos realizar:

1. Mediante polinomios de interpolación:
    1. $x(t) = P_n(t)$
    2. $y(t) = Q_n(t)$
2. Mediante splines
3. Mediante otro tipo de interpolación: B-splines, Bézier,...

Interpolación en curvas

Ejemplo 6 Para $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$, se tienen los nodos

$$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(0,0)$$

1. Calculamos el polinomio de interpolación de $(0,1),(1,0),(2,-1),(3,0),(4,0)$, obteniendo

$$x(t) = -5/24t^4 + 19/12t^3 - 79/24t^2 + 11/12t + 1$$

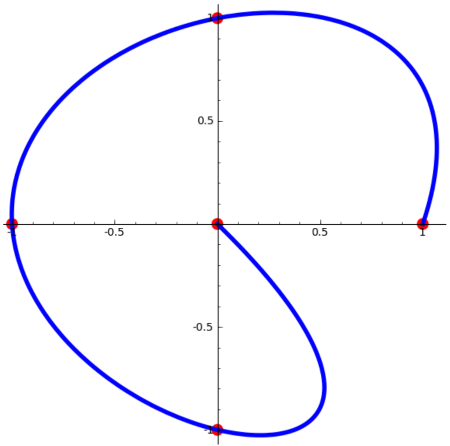
2. Calculamos el polinomio de interpolación de $(0,0),(1,1),(2,0),(3,-1),(4,0)$, obteniendo

$$y(t) = 1/3t^3 - 2t^2 + 8/3t$$

La curva definida mediante $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ es la resultante.

Interpolación en curvas

Ejemplo 6



Planteamiento del problema

Dados un conjunto de puntos en el plano

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$$

nos planteamos la forma de encontrar una función (con ciertas características) que no necesariamente interpole los puntos, pero sí minimice la suma de distancias entre los valores asignados por la función y los puntos. Esto es, buscamos una función óptima según el **criterio de los mínimos cuadrados**.
Por ejemplo, si buscamos la **recta** que mejor ajuste estos puntos, es decir, una función de la forma $y = a + bx$, lo que buscamos es aquellos valores a y b que minimicen la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$$

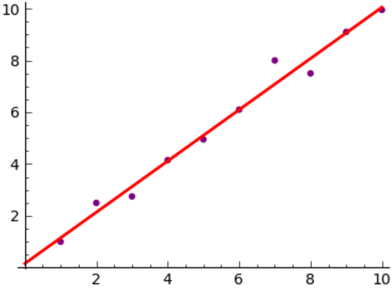
Este procedimiento se denomina regresión lineal.

Regresión lineal

Para la regresión lineal, la **recta de regresión** se construye mediante

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

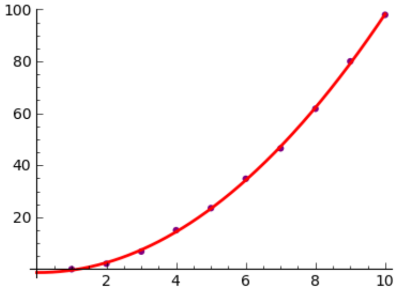
donde $\bar{x}, \bar{y}$ son las medias de los puntos $x_i' s$ e $y_i' s$ respectivamente.
Este tipo de regresión funcionará bien cuando los puntos estén alineados.



Regresión cuadrática

En otros casos, los puntos no están alineados, y buscamos funciones más complejas para ajustar.
Por ejemplo, $f(x) = a + bx + cx^2$, que proporciona la suma de cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i + cx_i^2))^2$$



Regresión con otras funciones

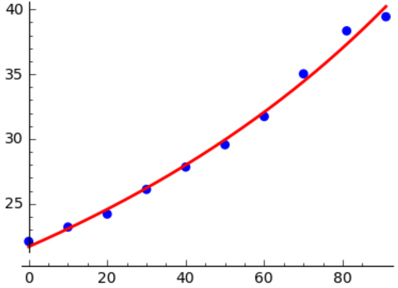
También es usual tomar funciones de la forma

$$f(x) = a\exp(bx)$$

Esta fórmula es fácilmente linealizable, tomando logaritmos, y se transforma en

$$\ln y = \ln a + bx$$

con lo cual, haciendo el cambio de variable $z = \ln y$, podemos calcular de manera sencilla $\ln a$ y b. Después bastará con deshacer el cambio.



Errores o Residuos

Para comparar posibles ajustes diferentes para un mismo conjunto de datos, lo podemos hacer mediante el cálculo de:

- La suma de los errores al cuadrado: Si el ajuste se realiza mediante el modelo $Y = f(X)$,

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

- Los errores medios: .

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

Planteamiento del problema

- Queremos calcular el valor de

$$\int_a^b f(x)dx$$

pero no existe una expresión analítica de la integral.

  - Por ejemplo, la capacidad calórica de un sólido es $\int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt$

- Disponemos de los valores

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots (x_n, f(x_n)),\ \ x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$$

- La **integración numérica** es una herramienta que permite obtener valores aproximados de integrales definidas mediante los valores de la función en un conjunto de puntos.

Fórmulas de cuadratura

Denominamos **fórmula de cuadratura** a una expresión del tipo

$$Q[f] = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

- $x_0, x_1, \dots, x_n$ son los **nodos de cuadratura**, que son puntos de $[a, b]$.
- Generalmente, $x_0 = a$, $x_n = b$
- Los nodos suelen estar equiespaciados
- $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ son los **pesos**.

El **error de truncamiento** de la fórmula es

$$E[f] = \int_a^b f(x)dx - Q[f]$$

Grado de precisión de una fórmula de cuadratura

El **grado de precisión** de la fórmula de cuadratura es el mayor número natural n de modo que $E[P] = 0$ para cualquier polinomio P de grado $\leq n$.

Las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes consisten en

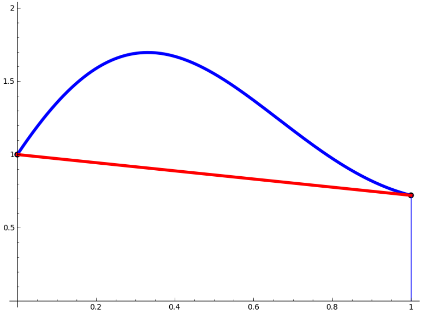
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

donde P_n es el polinomio interpolador de los puntos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots (x_n, f(x_n))$$

Así, el grado de precisión coincide con el grado del polinomio interpolador, n.

1. Regla del Trapecio



Aproximamos el área bajo la curva f mediante el área bajo la recta que interpola $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))}$$

$$\boxed{Error = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)}$$

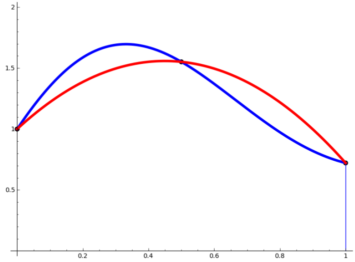
1. Regla del Trapecio

La recta que interpola a $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$es:

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) dx \\
&= f(a)\,[x]_a^b + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_a^b \\
&= \frac{(b - a)}{2}(f(a) + f(b))
\end{aligned}$$

2. Regla de Simpson



Aproximamos el área bajo la curva f mediante el área bajo el polinomio interpolador de

$$(a, f(a)), (c, f(c)), (b, f(b))$$

siendo $c = \frac{a+b}{2}$ el punto medio del intervalo $[a, b]$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b))}$$

$$\boxed{Error = -\frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\xi)}$$

Reglas Compuestas

Otra forma de aproximar el valor de

$$\int_a^b f(x)dx$$

conociendo

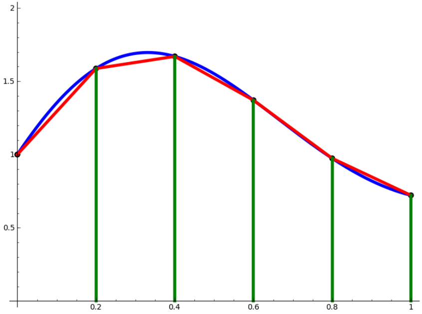
$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

es dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos y aplicar una regla simple en cada uno de ellos:

1. Si aplicamos la regla del trapecio simple en cada subintervalo, tenemos la regla del trapecio compuesta.
2. Si aplicamos la regla de Simpson en cada subintervalo, tendremos la regla de Simpson compuesta.

3. Regla del Trapecio Compuesta

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))}$$



$$x_0 = a, x_i = a + ih, x_n = b$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Aproximamos el área bajo
la curva f mediante el área
bajo el spline lineal interpolador
de $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$,..., $(x_n, f(x_n))$

Ejemplo 8

Aproximemos la $\int_0^1 (1 + e^{-x}\sin(4x))dx$:

- Mediante el trapecio simple: Los nodos que tomamos son $x_0 = 0, x_1 = 1$, con $f(0) = 1$, $f(1) = 0.72158792$

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 0.86079396$$

- Simpson: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$,

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1/2}{3}(f(0) + 4f(0.5) + f(1)) = 1.32127583$$

Ejemplo 8

- Mediante el trapecio compuesto para los nodos

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

$h = 1/5$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &\approx \frac{1/5}{2}(f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + 2f(0.8) + f(1)) \\ &= 1.29252451 \end{aligned}$$

El valor real, en este caso fácilmente calculable, es

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{21e - 4\cos 4 - \sin 4}{17e} = 1.30825060$$

Cuadratura adaptativa de Simpson

Vamos a denotar $S(f, a, b)$ la aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ por el método de Simpson.

Queremos calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, con un error fijado E.

1. Calculamos las aproximaciones $S(f, a, b)$, $S(f, a, c)$, $S(f, c, b)$, con $c = (a + b)/2$.
2. Estimamos el error cometido por $E_1 = (S(f, a, c) + S(f, c, b) - S(f, a, b))/15$.
3. Si $abs(E_1) < E$, terminamos y la integral vale $S(f, a, c) + S(f, c, b) + E_1$.
4. En caso contrario, volvemos al primer paso y calculamos las integrales

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

cada una de ellas con error menor que $E/2$.

Ejemplo 8

Aproximemos la $\int_0^1 (1 + e^{-x}\sin(4x))dx$ con un error inferior a 0.0005.

1. Calculamos:

$$S(f,0,1) = 1.321276$$

$$S(f,0,0.5) = \frac{1/2-0}{6}(f(0) + 4f(0.25) + f(0.5)) = 0.764406$$

$$S(f,0.5,1) = \frac{1/2-0}{6}(f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) = 0.544979$$

2. Estimación del error:

$$E_1 = (S(f,0,0.5) + S(f,0.5,1) - S(f,0,1))/15 = -0.000792$$

3. Como $abs(E_1) > 0.0001$, debemos continuar, estimando

$$\int_0^{0.5}(1 + e^{-x}\sin(4x))dx, \; \int_{0.5}^{1}(1 + e^{-x}\sin(4x))dx$$

cada una con un error menor que 0.00025

$\int_0^{0.5}(1+e^{-x}\sin(4x))dx$ con error < 0.00025

1. Sabemos que $S(f,0,0.5) = 0.764406$. Calculamos:

$$S(f,0,0.25) = \frac{0.25}{6}(f(0) + 4f(0.125) + f(0.25)) = 0.347821$$

$$S(f,0.25,0.5) = \frac{0.25}{6}(f(0.25) + 4f(0.375) + f(0.5)) = 0.414547$$

2. Estimación del error:

$$E_2 = (S(f,0,0.25) + S(f,0.25,0.5) - S(f,0,0.5))/15 = -0.000136$$

3. Como $abs(E_2) < 0.00025$, la estimación de la integral es

$$\int_0^{0.5}(1+e^{-x}\sin(4x))dx \approx S(f,0,0.25) + S(f,0.25,0.5) + E_2 = 0.762232$$

$\int_{0.5}^{1}(1+e^{-x}\sin(4x))dx$ con error < 0.00025

1. Sabemos que $S(f,0.5,1) = 0.544979$. Calculamos:

$$S(f,0.5,0.75) = \frac{0.25}{6}(f(0.5) + 4f(0.625) + f(0.75)) = 0.329147$$

$$S(f,0.75,1) = \frac{0.25}{6}(f(0.75) + 4f(0.875) + f(1)) = 0.216806$$

2. Estimación del error:

$$E_3 = (S(f,0.5,0.75) + S(f,0.75,1) - S(f,0.5,1))/15 = 0.000065$$

3. Como $abs(E_3) < 0.00025$, la estimación de la integral es

$$\int_{0.5}^{1}(1+e^{-x}\sin(4x))dx \approx S(f,0.5,0.75) + S(f,0.75,1) + E_3 = 0.546018$$

Ejemplo 8

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+e^{-x}\sin(4x))dx &= \\
&= \int_0^{0.5} (1+e^{-x}\sin(4x))dx + \int_{0.5}^1 (1+e^{-x}\sin(4x))dx \\
&\approx 0.762232 + 0.546018 \\
&= 1.308250,
\end{aligned}$$

muy cercano al valor real, que es 1.30825060.