# Tema 1 Ejercicios

1. Encontrar ejemplos de matrices $A$ tales que
   (a). $A$ no sea normal.
   (b). $A$ sea normal pero no unitaria.
   (c). $A$ sea unitaria pero no hermítica.
2. Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. Demostrar que si $A$ es una matriz triangular superior e invertible, entonces su inversa es triangular superior.
3. Sea $A$ una matriz subdividida en bloques de la forma
$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
donde los bloques son de $n \times n$. Demuestre que si $B - I$ es no singular, entonces para $k \geq 1$,
$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & (B^k - I)(B - I)^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
4. Calcular la norma uno, infinito y euclídea de las siguientes matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Calcular la norma dos de la siguiente matriz. Calcular los valores $\alpha \in [0, 2\pi]$ para los que la norma uno e infinito sea máxima.
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$
6. Consideremos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a). Representar en una gráfica la imagen de la bola unidad (con la norma euclídea) por la aplicación lineal dada por la matriz. En la misma gráfica, representar la imagen de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
   (b). En la gráfica anterior, representar la imagen de los autovectores de $A^*A$. Utilizar la orden arrow.
   (c). Añadir a la gráfica la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{\rho(A^*A)}$.
   (d). Considerar las matrices
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Calcular sus autovalores y tratar de deducir cómo será la imagen de la bola unidad. Repetir el proceso anterior con estas matrices.
7. Demostrar que la norma matricial (norma de Fröbenius)
$$\|A\| = \left( \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad (A = \{a_{ij}\} \in \mathcal{M}_n),$$
no está inducida por ninguna norma vectorial, pero es compatible con la norma vectorial euclídea (utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

8. Demostrar que la norma matricial
$$\|A\| = \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|, \quad (A = \{a_{ij}\} \in \mathcal{M}_n),$$
no está inducida por ninguna norma vectorial, pero es compatible con la norma vectorial $\|\cdot\|_1$.
9. Demostrar que $\|A\| = \text{máx}_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ no es una norma matricial.
10. Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se verifica
   (a). Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida tal que $\|A\| < 1$, entonces la matriz $I + A$ es invertible y se tiene que
$$\frac{1}{1+\|A\|} \le \|(I+A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|}.$$
   (b). Si una matriz de la forma $I + A$ es singular, entonces necesariamente $\|A\| \ge 1$ para cualquier norma matricial (inducida o no).
11. Sea $A$ una matriz hermítica tal que $\Delta_k > 0$, $1 \le k \le n$. Entonces $A$ es definida positiva.
12. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz real, simétrica y definida positiva. Entonces
   (a). $a_{ii} > 0$ para todo $1 \le i \le n$.
   (b). $\text{máx}_{1\le i,j\le n} a_{ij} = \text{máx}_{1\le i\le n} a_{ii}$.
13. Consideremos las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$
   (a). Calcular la imagen de la bola unidad con norma euclídea por las aplicaciones lineales definidas por dichas matrices.
   (b). Calcular la norma 2 de ambas matrices.
   (c). Obtener las direcciones en las que la imagen de la bola unidad alcanza el máximo y el mínimo.
14. Demostrar que para cualquier matriz no singular $A$ y cualquier norma matricial $\|\cdot\|$,
$$\|I\| \ge 1, \quad \|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}.$$
15. Demostrar que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal y que el determinante de una matriz ortogonal vale $\pm 1$.
16. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{C}$, obtener en términos de $v_1, \dots, v_n$ y $v$, los coeficientes $c_k \in \mathbb{R}$ tales que
$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$
17. Demostrar (usando la norma euclídea matricial)
   (a). $\rho^{1/2}\left((A^* + B^*)(A+B)\right) \le \rho^{1/2}(A^*A) + \rho^{1/2}(B^*B)$.
   (b). $\rho\left((AB)^*(AB)\right) \le \rho(A^*A)\rho(B^*B)$.
18. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ invertible y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida. Probar
   (a). $\text{cond}(A) \ge 1$
   (b). $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$
   (c). $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \ne 0$.
19. Consideramos el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/30 \\ 1 & 1/31 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{31}{30}, \frac{32}{31} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el término independiente se ha obtenido midiendo con un error en cada coordenada de $\pm 0{,}01$. Acotar el error en las soluciones.

20. 💻 Sea
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a). Calcula las normas 1,2 e infinito de la matriz $A$.
   (b). Calcula un vector unitario con la norma 1, $u$, tal que $\|A\|_1 = \|A\|_1\|u\|_1$.
   (c). Idem para las normas 2 e $\infty$.
   (d). Calcular los autovectores unitarios (usar la orden de sage *eigenvectors_right*) con la norma euclídea de $A^tA$. Calcular su imagen por $A$. Comprobar que tanto los autovectores como sus imágenes son ortogonales, es decir, forman una base. Calcular $\min_{\|u\|_2=1}\|Au\|_2$. Repetir el proceso cambiando $A$ por $A^{-1}$. ¿Qué relación hay entre la $1/\|A^{-1}\|_2$ y $\min_{\|u\|_2=1}\|Au\|_2$?
   (e). Calcular $\min_{\|u\|_1=1}\|Au\|_2$.
   (f). Idem para la norma infinito.

21. 💻 La matriz de Hilbert de $n \times n$ está definida como
$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$
Son matrices típicamente mal condicionadas.
   (a). Calcula los números de condición de la matriz de Hilbert de dimensión 5 con la norma 1 y con la norma infinito.
   (b). Crea varias matrices aleatorias de dimensión 4. Calcula su determinante y su número de condición (con tu norma preferida). ¿Qué relación hay?
   (c). Crea muchas matrices aleatorias de dimensión 4 y representa en una gráfica el determinante y el número de condición.

22. 💻 Consideramos el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/30 \\ 1 & 1/31 \end{pmatrix} x = b,$$
con $b$ un vector unitario con la norma 2. Suponemos que tenemos un pequeño error en el término independiente, es decir, en lugar de $b$, tenemos $b + \tilde{b}$ y sabemos que $\|\tilde{b}\|_2/\|b\|_2 \leq 1$.
   (a). Calcular el número de condición de la matriz del sistema con la norma euclídea.
   (b). Acotar el error relativo de las soluciones.
   (c). Encontrar $b$ de norma 1 y $\tilde{b}$ en las condiciones anteriores para que el error sea máximo.
   (d). Idem para mínimo.

23. Demostrar que si $p$ es un polinomio de grado $d$, entonces $p(n) \in \mathcal{O}(n^d)$.

24. Probar que $n \ln n \notin \mathcal{O}(n)$ y que $n^2 \notin \mathcal{O}(n \ln n)$.

25. Sea
$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i(i+3).$$
Demostrar (sin calcular el sumatorio) que $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$.

26. Sea
$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n-1}(i+1)j.$$
Demostrar que $f(n)\in\mathcal{O}(n^4)$.

27. Sea $f(n)$ el $n$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Demostrar que $f(n)\notin\mathcal{O}(n)$ y $f(n)\in\mathcal{O}(2^n)$.

28. Al aplicar la factorización LU con pivote a una matriz diagonalmente dominante, ¿siempre se elige como pivote el elemento de la diagonal?

29. A partir de la eliminación gaussiana, obtener la factorización LU de las siguientes matrices:
$$A=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&-1&3\\1&3&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&3&-1\\3&-3&0&6\\0&2&4&-6\end{pmatrix}$$

30. A partir de la eliminación gaussiana con pivote, obtener la factorización LU de las siguientes matrices:
$$A=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&-1&3\\1&3&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&3&-1\\3&-3&0&6\\0&2&4&-6\end{pmatrix}$$

31. Mediante factorización LU, obtener la inversa de las siguientes matrices
$$A=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&-1&3\\1&3&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&3&-1\\3&-3&0&6\\0&2&4&-6\end{pmatrix}$$

32. Considerar la matriz
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&3&0&0\\0&9&4&0\\5&0&8&10\end{pmatrix}$$
   (a). Determinar una matriz triangular inferior $M$ con diagonal unitaria y una matriz triangular superior $U$ tal que $MA=U$.
   (b). Determinar una matriz triangular inferior $L$ con diagonal unitaria y una matriz triangular superior $U$ tal que $A=LU$. Mostrar que $ML=I$ (es decir, $L=M^{-1}$).

33. Consideremos la matriz
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\\3&-4&4\end{pmatrix}.$$
   (a). Obtener la factorización LU de la matriz A.
   (b). Utilizar dicha factorización para obtener la inversa de $A$.
   (c). Obtener la factorización LU de $A^tA$. A partir de dicha factorización, obtener la factorización de la forma $LDL^t$ y a partir de ella la factorización de Choleski.

34. Probar que la siguiente matriz no puede factorizarse como producto $LU$, donde $L$ es una matriz triangular

inferior y $U$ es una matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Factorizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a). Como $LU$ donde $L$ es triangular inferior con diagonal unitaria y $U$ es triangular superior.
   (b). Usando la factorización anterior, factorizarla como $LDU$ donde $L$ es triangular inferior con diagonal unitaria, $D$ es diagonal y $U$ es triangular superior con diagonal unitaria.
   (c). Usando la factorización anterior, factorizarla como $LU$ donde $L$ es triangular inferior y $U$ es triangular superior con diagonal unitaria.
   (d). Usando la factorización anterior, factorizarla como $LL^t$, donde $L$ es triangular inferior.

36. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a). Obtener la factorización de Schur. ¿Qué ocurre? Calcular los autovalores de la matriz $A$ y discutir porqué no factoriza en los reales como una matriz unitaria por una matriz triangular. Obtener la factorización en los números complejos en doble precisión (CDF)
   (b). Resolver el sistem $Ax = b$ con $b = (1, 2, 3)$ usando la factorización anterior.
   (c). Consideremos ahora la aplicación lineal dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   Calcular su factorización de Schur. Representar las columnas de la matriz $U$ y también las de $AU$.
   (d). Obtener la factorización de Schur de cualquiera de las matrices anteriores "paso a paso", siguiendo la demostración vista en clase. Para calcular un autovector se puede usar la función *eigenvectors_right* y para extender a una base ortonormal, se puede utilizar la función *gram_schmidt* de Sage.