Tema 2 Ejercicios

1. Demostrar que para matrices de orden 2, el método de Jacobi converge si y sólo si el de Gauss-Seidel converge.
2. Aplicar tres pasos del método de Jacobi para aproximar la solución de los siguientes sistemas (partiendo de $(0,0,0,0)$). Calcular el error residual.

$$a)\begin{cases}4x_1+2x_2=0\\2x_1-5x_2+2x_3=3\\4x_3-2x_4=0\\x_3-3x_4=0\end{cases}\quad b)\begin{cases}10x_1+x_2=1\\10x_2+x_3=0\\10x_3+x_4=1\\x_1+10x_4=0\end{cases}\quad c)\begin{cases}x_1+x_3=1\\-2x_2-4x_3=2\\2x_3-2x_4=3\\5x_1+4x_4=4\end{cases}$$

3. Aplicar tres pasos del método de Gauss-Seidel para aproximar la solución de los siguientes sistemas (partiendo de (0,0,0,0)). Calcular el error residual.

$$a)\begin{cases}4x_1+2x_2=0\\2x_1-5x_2+2x_3=3\\4x_3-2x_4=0\\x_3-3x_4=0\end{cases}\quad b)\begin{cases}10x_1+x_2=1\\10x_2+x_3=0\\10x_3+x_4=1\\x_1+10x_4=0\end{cases}\quad c)\begin{cases}x_1+x_3=1\\-2x_2-4x_3=2\\2x_3-2x_4=3\\5x_1+4x_4=4\end{cases}$$

4. En general no se puede comparar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Probar que
   (a). Si $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$, entonces el método de Jacobi converge, pero el de Gauss-Seidel no.
   (b). Si $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, entonces el método de Gauss-Seidel converge, pero el de Jacobi no.
5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&\alpha\\1&3&\alpha\\1&0&2\end{pmatrix}$, probar para qué valores de α el método de Jacobi es convergente.
6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\\beta&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, probar para qué valores de α y β los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.
7. Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

   y el vector $b=(1,2,3)$.
   (a). ¿Existe x_0 tal que el método de Jacobi es convergente?
   (b). Encontrar un vector inicial de modo que el método de Jacobi para el sistema $Ax=b$ sea convergente. Aplicar 1000 iteraciones del método y representar los errores residuales.
8. Se considera un disipador en forma de barra. Dividimos barra en 10 secciones de la misma longitud. Denotamos la temperatura de la sección i como x_i. Se sabe que en estado estacionario (es decir, cuando

alcanza el equilibrio), se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ \dots, \\ -x_8 + 4x_9 - x_{10} = 0, \\ -x_9 + 4x_{10} = 0. \end{cases}$$

(a). Calcular la solución mediante factorización LU con pivote.

(b). Calcular la solución mediante dos pasos de Gauss-Seidel. ¿Cuál es el error cometido?

9. Determinar los círculos de Geršgorin de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Utilizando dichos círculos, acotar el radio espectral de A.

10. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a). Calcular sus autovectores con Sage.

(b). Para cada autovalor, obtener un autovector con norma infinito 1 y que tenga una coordenada igual a 1.

(c). Usando el resultado obtenido en el apartado anterior, ¿estarán los autovalores contenidos en los discos de Gershgorin correspondientes a las filas 1 y 3? Comprobar.

11. Usando el Teorema de Geršgorin, probar que toda matriz A estrictamente diagonal dominante es no singular. Idem si A^t es estrictamente diagonal dominante.

12. Encontrar una matriz $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que los discos de Gershgorin tengan todos radio estrictamente positivo y que tenga un autovalor que esté en el borde de uno de los discos.

13. Encontrar una matriz $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que los discos de Gershgorin tengan todos radio estrictamente positivo y que tenga un disco que no contenga autovalores.

14. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia para aproximar el autovalor dominante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

15. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia para aproximar el autovalor dominante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

tomando como vector inicial $x_0 = (1, -1, 2)$.

16. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia inversa para aproximar el autovalor de menor valor absoluto de la siguiente matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
tomando como vector inicial $x_0 = (-1, 0, 1)$.

17. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia inversa desplazada para aproximar cada uno de los autovalores de la siguiente matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$
tomando como vectores iniciales $(1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 4)$.

18. Encontrar una factorización QR de la siguiente matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Aplicar 10 pasos del método QR para estimar los autovalores de la matriz
$$\begin{pmatrix} 5{,}0 & -4{,}0 & 1{,}0 \\ -4{,}0 & 6{,}0 & -4{,}0 \\ 1{,}0 & -4{,}0 & 5{,}0 \end{pmatrix}.$$