## STema 3 Ejercicios S

- 1. Probar que la ecuación  $e^x + 2x = 0$  tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de  $10^{-2}$ .
- 2. Aplicar el Método de bisección a  $f(x) = x^3 16 = 0$ , a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor que 0.125.
- 3. Estudiar si el método del punto fijo para la función  $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$  converge para condiciones iniciales en el intervalo [0, 1].
- 4. Acotar el error cometido al aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de  $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$  partiendo de  $x_0 = 0.5$ . Comprobar las condiciones en el intervalo [0, 1].
- 5. Encontrar un intervalo donde la función  $F(x) = \exp(-x)/3$  tenga un punto fijo y tal que el método del punto fijo converja para cualquier valor inicial en dicho intervalo.
- 6. Let Probar que si F es una función de clase  $C^1$  y [a,b] es un intervalo tal que  $F(x) \in [a,b]$  para todo  $x \in [a,b]$  y 0 < F'(x) < 1, entonces la sucesión obtenida al aplicar el método del punto fijo converge monótonamente a un punto fijo de F.
- 7. **Le** Probar que si F es una función de clase  $C^1$  y [a,b] es un intervalo tal que  $F(x) \in [a,b]$  para todo  $x \in [a,b]$  y -1 < F'(x) < 0, entonces F tiene un único punto fijo c en dicho intervalo, y si  $x_n$  es la sucesión obtenida al aplicar el método del punto fijo, entonces  $(x_n c)(x_{n+1} c) < 0$  y  $|x_n c|$  converge monotonamente (decreciente) a cero.
- 8. Pemostrar que si F es una función de clase  $C^1$  y tiene un punto fijo  $x_0$  tal que  $|F'(x_0)| < 1$ , entonces existe un intervalo tal que el método del punto fijo converge para toda condición inicial en dicho intervalo.
- 9. Encontrar una solución de  $e^x 4x \sin(x) = 0$  en el intervalo [0,1] mediante el método del punto fijo. Probar al menos tres transformaciones de la ecuación y estudiar la convergencia del método.
- 10. Le Discutir la convergencia del método del punto fijo para la función  $F(x) = ae^x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , para condiciones iniciales en el intervalo [0,1].
- 11. Aplicar cuatro pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de 50 partiendo de  $x_0 = 4$ . Acotar el error.
- 12. Aproximar mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de  $x_0 = -0.5$  la posición del mínimo de  $f(x) = e^x + x^2/2$ . Acotar el error.
- 13. Le Obtener una función diferenciable, con un único cero en [0,1] tal que al aplicar el método de Newton-Raphson partiendo de  $x_0 = 0$ , obtengamos  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ , ...
- 14. Le Obtener un ejemplo de función diferenciable tal que al aplicar el método de Newton-Raphson, obtengamos un 3-ciclo, es decir, la sucesión repita siempre los mismos tres valores.
- 15. 

  Supongamos que las ecuaciones del movimiento de un proyectil son

$$y = f(t) = 4605(1 - e^{-t/15}) - 147t, \quad x = r(t) = 22400(1 - e^{-t/15}).$$

Determine el tiempo transcurrido hasta el impacto con error menor que  $10^{-10}$ .

- 16.  $\blacksquare$  Halle el punto de la parábola  $y=x^2$  que está más cerca del punto (3,1) con error menor que  $10^{-10}$ . Utilizar el método de Aitken para estimar el error.
- 17.  $\blacksquare$  Halle el punto de la curva y = sen(x sen(x)) que está más cerca del punto (2,1,0,5) con error menor que  $10^{-10}$ . Utilizar el método de Aitken para estimar el error.

- 18.  $\blacksquare$  Halle con error menor que  $10^{-10}$ , el valor de x para el que es mínima la distancia vertical entre las gráficas de las funciones  $f(x) = x^2 + 2$  y  $g(x) = x/5 \sin(x)$ . Utilizar el método de Aitken para estimar el error.
- 19.  $\square$  La curva formada por un cable colgante se llama catenaria. Supongamos que el punto más bajo de una catenaria es el origen (0,0), entonces la ecuación de la catenaria es  $y = C \cosh(x/C) C$ . Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos  $(\pm a, b)$ , entonces debemos resolver la ecuación  $b = C \cosh(a/C) C$ , donde la incógnita es C.
  - (a). Pruebe que la catenaria que pasa por los puntos  $(\pm 10,6)$  es

$$y = 9,1889 \cosh(x/9,1889) - 9,1889.$$

- (b). Halle la catenaria que pasa por los puntos  $(\pm 12, 5)$ .
- 20. Let  $Si \ p$  es una raíz de multiplicidad n de una función f de clase n+1, entonces  $f(x)=(x-p)^nq(x)$ , donde  $q(p) \neq 0$ .
  - (a). Pruebe que h(x) = f(x)/f'(x) tiene una raíz simple en p.
  - (b). Pruebe que si aplicamos elmétodo de Newton-Raphson para hallar la ráiz simple p de h(x), entonces el método queda:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x)f''(x)}$$

- (c). Aplicar el método anterior para obtener la raíz de  $f(x) = sen(x^3)$  partiendo de  $x_0 = 1$ . Compararlo con el método usual de Newton-Raphson.
- 21. Aproximar una solución de

$$\begin{cases} x - y^3/10 - z^2/20 = 1, \\ x^2/10 + y - z^3/20 = 1, \\ x/20 - y^3/20 + z = 1, \end{cases}$$

aplicando tres pasos del método del punto fijo, partiendo de (1,1,1)

22. Aproximar una solución de

$$\begin{cases} x - y^3/10 - z^2/20 = 1, \\ x^2/10 + y - z^3/20 = 1, \\ x/20 - y^3/20 + z = 1, \end{cases}$$

aplicando tres pasos del método de Newton-Raphson, partiendo de (1,1,1).

23. Aproximar la distancia entre las curvas paramétricas definidas mediante las ecuaciones

$$r(t) = (\cos t, 2\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

y

$$s(t) = (4 - \sin t \cos t, 5 + \cos 2t)$$
  $t \in [0, 2\pi].$ 

Elegir el método y aplicar cinco iteraciones.

24. Aproximar la ecuación de una recta tangente común a las curvas paramétricas

$$r(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

у

$$s(t) = (3 + 2\sin t, \cos t)$$
  $t \in [0, 2\pi].$ 

Elegir el método y aplicar cinco iteraciones.