# *Tema 3 Ejercicios*

1. *Probar que la ecuación* $e^x + 2x = 0$ *tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de* $10^{-2}$.
2. *Aplicar el Método de bisección a* $f(x) = x^3 - 16 = 0$*, a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor que* $0{,}125$.
3. *Estudiar si el método del punto fijo para la función* $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ *converge para condiciones iniciales en el intervalo* $[0,1]$.
4. *Acotar el error cometido al aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de* $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ *partiendo de* $x_0 = 0{,}5$*. Comprobar las condiciones en el intervalo* $[0,1]$.
5. *Encontrar un intervalo donde la función* $F(x) = \exp(-x)/3$ *tenga un punto fijo y tal que el método del punto fijo converja para cualquier valor inicial en dicho intervalo.*
6. *Probar que si* $F$ *es una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *y* $[a,b]$ *es un intervalo tal que* $F(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$ *y* $0 < F'(x) < 1$*, entonces la sucesión obtenida al aplicar el método del punto fijo converge monótonamente a un punto fijo de* $F$.
7. *Probar que si* $F$ *es una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *y* $[a,b]$ *es un intervalo tal que* $F(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$ *y* $-1 < F'(x) < 0$*, entonces* $F$ *tiene un único punto fijo* $c$ *en dicho intervalo, y si* $x_n$ *es la sucesión obtenida al aplicar el método del punto fijo, entonces* $(x_n - c)(x_{n+1} - c) < 0$ *y* $|x_n - c|$ *converge monotonamente (decreciente) a cero.*
8. *Demostrar que si* $F$ *es una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *y tiene un punto fijo* $x_0$ *tal que* $|F'(x_0)| < 1$*, entonces existe un intervalo tal que el método del punto fijo converge para toda condición inicial en dicho intervalo.*
9. *Encontrar una solución de* $e^x - 4x - \sin(x) = 0$ *en el intervalo* $[0,1]$ *mediante el método del punto fijo. Probar al menos tres transformaciones de la ecuación y estudiar la convergencia del método.*
10. *Discutir la convergencia del método del punto fijo para la función* $F(x) = ae^x$*,* $a \in \mathbb{R}$*, para condiciones iniciales en el intervalo* $[0,1]$.
11. *Aplicar cuatro pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de* $50$ *partiendo de* $x_0 = 4$*. Acotar el error.*
12. *Aproximar mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de* $x_0 = -0{,}5$ *la posición del mínimo de* $f(x) = e^x + x^2/2$*. Acotar el error.*
13. *Obtener una función diferenciable, con un único cero en* $[0,1]$ *tal que al aplicar el método de Newton-Raphson partiendo de* $x_0 = 0$*, obtengamos* $x_1 = 1$*,* $x_2 = 0$*, ...*
14. *Obtener un ejemplo de función diferenciable tal que al aplicar el método de Newton-Raphson, obtengamos un 3-ciclo, es decir, la sucesión repita siempre los mismos tres valores.*
15. *Supongamos que las ecuaciones del movimiento de un proyectil son*
$$y = f(t) = 4605(1 - e^{-t/15}) - 147t, \quad x = r(t) = 22400(1 - e^{-t/15}).$$
*Determine el tiempo transcurrido hasta el impacto con error menor que* $10^{-10}$.
16. *Halle el punto de la parábola* $y = x^2$ *que está más cerca del punto* $(3,1)$ *con error menor que* $10^{-10}$*. Utilizar el método de Aitken para estimar el error.*
17. *Halle el punto de la curva* $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen}(x))$ *que está más cerca del punto* $(2{,}1, 0{,}5)$ *con error menor que* $10^{-10}$*. Utilizar el método de Aitken para estimar el error.*

18. *Halle con error menor que $10^{-10}$, el valor de $x$ para el que es mínima la distancia vertical entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x/5 - \operatorname{sen}(x)$. Utilizar el método de Aitken para estimar el error.*

19. *La curva formada por un cable colgante se llama catenaria. Supongamos que el punto más bajo de una catenaria es el origen $(0,0)$, entonces la ecuación de la catenaria es $y = C\cosh(x/C) - C$. Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos $(\pm a, b)$, entonces debemos resolver la ecuación $b = C\cosh(a/C) - C$, donde la incógnita es $C$.*

    (a). *Pruebe que la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 10, 6)$ es*

    $$y = 9{,}1889\cosh(x/9{,}1889) - 9{,}1889.$$

    (b). *Halle la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 12, 5)$.*

20. *Si $p$ es una raíz de multiplicidad $n$ de una función $f$ de clase $n+1$, entonces $f(x) = (x-p)^n q(x)$, donde $q(p) \neq 0$.*

    (a). *Pruebe que $h(x) = f(x)/f'(x)$ tiene una raíz simple en $p$.*

    (b). *Pruebe que si aplicamos elmétodo de Newton-Raphson para hallar la ráiz simple $p$ de $h(x)$, entonces el método queda:*

    $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x)f''(x)}$$

    (c). *Aplicar el método anterior para obtener la raíz de $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$ partiendo de $x_0 = 1$. Compararlo con el método usual de Newton-Raphson.*

21. *Aproximar una solución de*

    $$\begin{cases} x - y^3/10 - z^2/20 = 1, \\ x^2/10 + y - z^3/20 = 1, \\ x/20 - y^3/20 + z = 1, \end{cases}$$

    *aplicando tres pasos del método del punto fijo, partiendo de $(1,1,1)$*

22. *Aproximar una solución de*

    $$\begin{cases} x - y^3/10 - z^2/20 = 1, \\ x^2/10 + y - z^3/20 = 1, \\ x/20 - y^3/20 + z = 1, \end{cases}$$

    *aplicando tres pasos del método de Newton-Raphson, partiendo de $(1,1,1)$.*

23. *Aproximar la distancia entre las curvas paramétricas definidas mediante las ecuaciones*

    $$r(t) = (\cos t, 2\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

    *y*

    $$s(t) = (4 - \sin t\cos t, 5 + \cos 2t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

    *Elegir el método y aplicar cinco iteraciones.*

24. *Aproximar la ecuación de una recta tangente común a las curvas paramétricas*

    $$r(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

    *y*

    $$s(t) = (3 + 2\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

    *Elegir el método y aplicar cinco iteraciones.*