Tema 3 Ejercicios

1. *Probar que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.*
2. *Aplicar el Método de bisección a $f(x) = x^3 - 16 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor que $0{,}125$.*
3. *Estudiar si el método del punto fijo para la función $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ converge para condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.*
4. *Acotar el error cometido al aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ partiendo de $x_0 = 0{,}5$. Comprobar las condiciones en el intervalo $[0, 1]$.*
5. *Encontrar un intervalo donde la función $F(x) = \exp(-x)/3$ tenga un punto fijo y tal que el método del punto fijo converja para cualquier valor inicial en dicho intervalo.*
6. 👥 *Probar que si F es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $[a, b]$ es un intervalo tal que $F(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ y $0 < F'(x) < 1$, entonces la sucesión obtenida al aplicar el método del punto fijo converge monótonamente a un punto fijo de F.*
7. 👥 *Probar que si F es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $[a, b]$ es un intervalo tal que $F(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ y $-1 < F'(x) < 0$, entonces F tiene un único punto fijo c en dicho intervalo, y si x_n es la sucesión obtenida al aplicar el método del punto fijo, entonces $(x_n - c)(x_{n+1} - c) < 0$ y $|x_n - c|$ converge monotonamente (decreciente) a cero.*
8. 👥 *Demostrar que si F es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y tiene un punto fijo x_0 tal que $|F'(x_0)| < 1$, entonces existe un intervalo tal que el método del punto fijo converge para toda condición inicial en dicho intervalo.*
9. *Encontrar una solución de $e^x - 4x - \sin(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante el método del punto fijo. Probar al menos tres transformaciones de la ecuación y estudiar la convergencia del método.*
10. 👥 *Discutir la convergencia del método del punto fijo para la función $F(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$, para condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.*
11. *Aplicar cuatro pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de 50 partiendo de $x_0 = 4$. Acotar el error.*
12. *Aproximar mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = -0{,}5$ la posición del mínimo de $f(x) = e^x + x^2/2$. Acotar el error.*
13. 👥 *Obtener una función diferenciable, con un único cero en $[0, 1]$ tal que al aplicar el método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 0$, obtengamos $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, ...*
14. 👥 *Obtener un ejemplo de función diferenciable tal que al aplicar el método de Newton-Raphson, obtengamos un 3-ciclo, es decir, la sucesión repita siempre los mismos tres valores.*
15. 💻 *Supongamos que las ecuaciones del movimiento de un proyectil son*

$$y = f(t) = 4605(1 - e^{-t/15}) - 147t, \quad x = r(t) = 22400(1 - e^{-t/15}).$$

Determine el tiempo transcurrido hasta el impacto con error menor que 10^{-10}.
16. 💻 *Halle el punto de la parábola $y = x^2$ que está más cerca del punto $(3, 1)$ con error menor que 10^{-10}. Utilizar el método de Aitken para estimar el error.*
17. 💻 *Halle el punto de la curva $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen}(x))$ que está más cerca del punto $(2{,}1, 0{,}5)$ con error menor que 10^{-10}. Utilizar el método de Aitken para estimar el error.*

18. 💻 *Halle con error menor que* 10^{-10}*, el valor de* x *para el que es mínima la distancia vertical entre las gráficas de las funciones* $f(x) = x^2 + 2$ *y* $g(x) = x/5 - \operatorname{sen}(x)$*. Utilizar el método de Aitken para estimar el error.*
19. 💻 *La curva formada por un cable colgante se llama catenaria. Supongamos que el punto más bajo de una catenaria es el origen* $(0, 0)$*, entonces la ecuación de la catenaria es* $y = C\cosh(x/C) - C$*. Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos* $(\pm a, b)$*, entonces debemos resolver la ecuación* $b = C\cosh(a/C) - C$*, donde la incógnita es* C*.*
    (a). *Pruebe que la catenaria que pasa por los puntos* $(\pm 10, 6)$ *es*
    $$y = 9{,}1889\cosh(x/9{,}1889) - 9{,}1889.$$
    (b). *Halle la catenaria que pasa por los puntos* $(\pm 12, 5)$*.*
20. 👥 *Si* p *es una raíz de multiplicidad* n *de una función* f *de clase* $n + 1$*, entonces* $f(x) = (x - p)^n q(x)$*, donde* $q(p) \neq 0$*.*
    (a). *Pruebe que* $h(x) = f(x)/f'(x)$ *tiene una raíz simple en* p*.*
    (b). *Pruebe que si aplicamos elmétodo de Newton-Raphson para hallar la ráiz simple* p *de* $h(x)$*, entonces el método queda:*
    $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x)f''(x)}$$
    (c). *Aplicar el método anterior para obtener la raíz de* $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$ *partiendo de* $x_0 = 1$*. Compararlo con el método usual de Newton-Raphson.*
21. *Aproximar una solución de*
    $$\begin{cases} x - y^3/10 - z^2/20 = 1, \\ x^2/10 + y - z^3/20 = 1, \\ x/20 - y^3/20 + z = 1, \end{cases}$$
    aplicando tres pasos del método del punto fijo, partiendo de $(1, 1, 1)$
22. *Aproximar una solución de*
    $$\begin{cases} x - y^3/10 - z^2/20 = 1, \\ x^2/10 + y - z^3/20 = 1, \\ x/20 - y^3/20 + z = 1, \end{cases}$$
    aplicando tres pasos del método de Newton-Raphson, partiendo de $(1, 1, 1)$*.*
23. 💻 *Aproximar la distancia entre las curvas paramétricas definidas mediante las ecuaciones*
    $$r(t) = (\cos t, 2\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$
    y
    $$s(t) = (4 - \sin t\cos t, 5 + \cos 2t) \quad t \in [0, 2\pi].$$
    Elegir el método y aplicar cinco iteraciones.
24. 💻 *Aproximar la ecuación de una recta tangente común a las curvas paramétricas*
    $$r(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$
    y
    $$s(t) = (3 + 2\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi].$$
    Elegir el método y aplicar cinco iteraciones.