# Tema 4 Ejercicios

1. Probar que los polinomios $p(x) = -x^2 + 3x$ y $q(x) = -x^3 + 3x^2$ interpolan los puntos $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,0)$. ¿Por qué no tenemos un único polinomio interpolador en este caso?
2. 💻 Encontrar $a_0, a_1, a_2$ tales que la función
$$f(x) = a_0 \frac{1}{1+x^2} + a_1 \frac{1}{1+(x-1)^2} + a_2 \frac{1}{1+(x-2)^2},$$
interpole a la función $e^x$ en los puntos $x = 0, 1, 2$. Dibuja la gráfica de ambas funciones.
3. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Acotar el error cometido a tomar $f(0{,}5)$ como el valor del polinomio interpolador de $f$ en los puntos $x = 0, 1, 2$.
4. Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$. Acotar el error cometido a tomar $f(\pi/5)$ como el valor del polinomio interpolador de $f$ en los puntos $x = 0, \pi/4, \pi/2$.
5. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Tomamos $x_0 = 0$. ¿Cuál es el mayor valor de $x_1$ que podemos considerar para que la interpolación lineal de $f$ en $x_0, x_1$ tenga un error menor de $10^{-2}$? (es decir, $|f(x) - p(x)| < 10^{-2}$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, donde $p$ es el polinomio lineal que interpola $f$ en $x_0, x_1$).
6. Hemos aproximado la función $\ln x$ por un polinomio de interpolación de grado 9 en el intervalo $[1, 2]$ usando puntos uniformemente distribuidos. Acotar el error cometido.
7. Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

(a).

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b).

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c).

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 | 2 |

8. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas mediante diferencias divididas:

(a).

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b).

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c).

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 | 2 |

9. Sea la función $f(x) = e^x$ y los valores siguientes: $f(0) = 1$, $f(0{,}5) = 1{,}64872$, $f(1) = 2{,}71828$ y $f(2) = 7{,}38906$, efectuar los siguientes cálculos:
   (a). Aproximar $f(0{,}25)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.
   (b). Aproximar $f(0{,}75)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.
   (c). Aproximar $f(0{,}25)$ y $f(0{,}75)$ utilizando el polinomio de interpolación de los puntos $(0, f(0))$, $(0{,}5, f(0{,}5))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.
10. El polinomio
$$p(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x + (x+1)x(x-1),$$
es el polinomio interpolador de los puntos $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 16)$. Calcular el polinomio interpolador de los puntos $(-2, 8)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 16)$, sin recalcular todo el polinomio de interpolación
11. 👩‍💻 Obtener el polinomio interpolador de la siguiente tabla, usando que el polinomio interpolador de los 9 primeros puntos es $x^2$:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 1 |

12. Dados $x_0 < x_1 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0', y_1, y_1' \in \mathbb{R}$, obtener el polinomio interpolador (polinomio interpolador de Hermite) determinado por $p(x_0) = y_0$, $p'(x_0) = y_0'$, $p(x_1) = y_1$, $p'(x_1) = y_1'$.

13. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

(a).

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |
| $y'$ | 1 | 0 | 2 |

(b).

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 3 | 0 |

(c).

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

14. Obtener la interpolación cúbica a trozos de Hermite de las siguientes tablas:

(a).

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |
| $y'$ | 1 | 0 | 2 |

(b).

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 3 | 0 |

(c).

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

15. Obtener los splines cúbicos naturales que interpolan las siguientes tablas

(a).

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b).

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c).

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 | 2 |

16. Obtener la curva polinomial que interpola los siguientes puntos, considerados en los momentos $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$:

(a).

| $x$ | -1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b).

| $x$ | 0 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c).

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 |

(d).

| $x$ | -1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1 | 1 |

(e).

| $x$ | 0 | 1 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 2 |

(f).

| $x$ | -1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | -3 |

17. Sea $p_0, p_1, \ldots$ una sucesión de polinoios tal que, para cada $n$, $p_n$ tiene exactamente grado $n$. Demiestre que la sucesión es linealmente independiente.

18. 👥 Demuestre que la matriz de Hilbert, con elementos $a_{ij} = (1 + i + j)^{-1}$ es una matriz de Gram para las funciones $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, es decir, es la matriz del sistema lineal que se obtiene al plantear el problema de aproximación para la norma inducida por cierto producto escalar.

19. Obtener el polinomio de grado menor o igual a 3 que mejor aproxima $f(x) = e^x$ con la norma inducida por el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

20. Obtener el polinomio de grado menor o igual a 3 que mejor aproxima $f(x) = e^x$ con la norma inducida por el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{1}^{2} f(x)g(x)\,dx.$$

21. 💻 Obtener el polinomio de grado menor o igual a 3 que mejor aproxima $f(x) = e^x$ con la norma inducida por el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$