# Ejercicios Tema 4

1. Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

(a)

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c)

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 | 2 |

2. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas mediante diferencias divididas:

(a)

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c)

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 | 2 |

3. Sea la función $f(x) = e^x$ y los valores siguientes: $f(0) = 1$, $f(0.5) = 1.64872$, $f(1) = 2.71828$ y $f(2) = 7.38906$, efectuar los siguientes cálculos:
   (a) Aproximar $f(0.25)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.
   (b) Aproximar $f(0.75)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.
   (c) Aproximar $f(0.25)$ y $f(0.75)$ utilizando el polinomio de interpolación de los puntos $(0, f(0))$, $(0.5, f(0.5))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.

4. Obtener el polinomio interpolador de la siguiente tabla:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 1 |

5. Dados $x_0 < x_1 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0', y_1, y_1' \in \mathbb{R}$, Obtener el polinomio interpolador (polinomio interpolador de Hermite) determinado por $p(x_0) = y_0$, $p'(x_0) = y_0'$, $p(x_1) = y_1$, $p'(x_1) = y_1'$.

6. Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:

(a)

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |
| $y'$ | 1 | 0 | 2 |

(b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 3 | 0 |

(c)

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

7. Obtener la interpolación cúbica a trozos de Hermite de las siguientes tablas:

(a)

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |
| $y'$ | 1 | 0 | 2 |

(b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 3 | 0 |

(c)

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 0 | 2 |
| $y'$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

8. Obtener los splines cúbicos naturales que interpolan las siguientes tablas

(a)

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c)

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 | 2 |

9. Obtener la curva polinomial que interpola los siguientes puntos, considerados en los momentos $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$:

(a)

| $x$ | -1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 0 |

(b)

| $x$ | 0 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 0 | 2 |

(c)

| $x$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 0 |

(d)

| $x$ | -1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1 | 1 |

(e)

| $x$ | 0 | 1 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 2 |

(f)

| $x$ | -1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | -3 |

10. Probar que los polinomios $p(x) = -x^2 + 3x$ y $q(x) = -x^3 + 3x^2$ interpolan los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$. ¿Por qué no tenemos un único polinomio interpolador en este caso?

11. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Acotar el error cometido a tomar $f(0.5)$ como el valor del polinomio interpolador de $f$ en los puntos $x = 0, 1, 2$.

12. Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$. Acotar el error cometido a tomar $f(\pi/5)$ como el valor del polinomio interpolador de $f$ en los puntos $x = 0, \pi/4, \pi/2$.

13. Consideremos la función $f(x) = e^x$. Tomamos $x_0 = 0$. ¿Cuál es el mayor valor de $x_1$ que podemos considerar para que la interpolación lineal de $f$ en $x_0, x_1$ tenga un error menor de $10^{-2}$? (es decir, $|f(x) - p(x)| < 10^{-2}$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, donde $p$ es el polinomio lineal que interpola $f$ en $x_0, x_1$).

14. El polinomio
$$p(x) = 1 + (x + 1) + (x + 1)x + (x + 1)x(x - 1),$$
es el polinomio interpolador de los puntos $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 16)$. Calcular el polinomio interpolador de los puntos $(-2, 8)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 16)$, sin recalcular todo el polinomio de interpolación

15. Hemos aproximado la función $\ln x$ por un polinomio de interpolación de grado 9 en el intervalo $[1, 2]$ usando puntos uniformemente distribuidos. Acotar el error cometido.