Tema 5 Ejercicios

1. La regla del trapecio aplicada a $\int_0^2 f(x)\,dx$ nos da el valor 4 y la de Simpson nos da el valor 2. ¿Cuál es el valor de $f(1)$?
2. Obtener una función $f(x)$ tal que la regla del trapecio de el valor exacto de $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$, pero la de Simpson no sea exacta.
3. Obtener el grado de precisión de la fórmula de cuadratura
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$
4. Sea $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = b$. Obtener el grado de precisión de la fórmula de cuadratura
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{9}{4}hf\left(x_1\right) + \frac{3}{4}hf\left(x_2\right).$$
5. La fórmula de cuadratura
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$$
es exacta para todos los polinomios de grado ≤ 2. Determinar c_0, c_1, c_2.
6. Encuentra c_0, c_1, x_1 tales que la fórmula de cuadratura
$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$
tenga el máximo grado de precisión posible.
7. Encuentra x_0, c_1, x_1 tales que la fórmula de cuadratura
$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1),$$
tenga el máximo grado de precisión posible.
8. Aproximar aplicando la regla de Simpson
$$\int_1^3 \int_1^2 \ln(x+2y)\,dy\,dx.$$
9. Encontrar el valor de h para que el error de cuadratura con la regla del trapecio compuesto para las siguientes integrales sea menor que 10^{-4}.
   (a). $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$.
   (b). $\int_0^1 \cos(\pi^2 x^2)\,dx$.
   (c). $\int_0^2 (x+4)^{-1}\,dx$.
   (d). $\int_1^2 x \ln x\,dx$.
10. Encontrar el valor de h para que el error de cuadratura con la regla de Simpson para las siguientes integrales sea menor que 10^{-4}.
   (a). $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$.
   (b). $\int_0^1 \cos(\pi^2 x^2)\,dx$.
   (c). $\int_0^2 (x+4)^{-1}\,dx$.
   (d). $\int_1^2 x \ln x\,dx$.
11. Determinar a, b, c, d para que la siguiente fórmula de cuadratura sea de grado tres
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1).$$

12. Determinar a, b, c, d, e para que la siguiente fórmula de cuadratura sea de grado cuatro

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1).$$

13. Aproximar por la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^{1} \sin(\pi x)\,dx, \quad \int_{1}^{3} \ln x\,dx, \quad \int_{1}^{2} e^{x^2}\,dx.$$

14. Demostrar que los pesos de las fórmulas de cuadratura gaussiana son siempre positivos[1].

15. Calcular mediante cuadratura adaptativa una aproximación con error estimado menor de 10^{-1} de las siguientes integrales:

(a). $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2}\,dx$
(b). $\int_1^2 (1+x^4)^{-1}\,dx$
(c). $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2}\,dx$
(d). $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$
(e). $\int_0^1 xe^x\,dx$
(f). $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

[1]Pista: considerar los polinomios $P_j(x) = \prod_{i\neq j}(x-x_i)^2/(x_j-x_i)^2$.