

Ejercicios Tema 5

1. La regla del trapecio aplicada a $\int_0^2 f(x) dx$ nos da el valor 4 y la de Simpson nos da el valor 2. ¿Cuál es el valor de $f(1)$?
2. Obtener una función $f(x)$ tal que la regla del trapecio de el valor exacto de $\int_{-1}^1 f(x) dx$, pero la de Simpson no sea exacta.
3. Obtener el grado de precisión de la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

4. Sea $h = (b - a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = b$. Obtener el grado de precisión de la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2).$$

5. La fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_0f(-1) + c_1f(0) + c_2f(1)$$

es exacta para todos los polinomios de grado ≤ 2 . Determinar c_0 , c_1 , c_2 .

6. Encuentra c_0, c_1, x_1 tales que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x) dx \approx c_0f(0) + c_1f(x_1),$$

tenga el máximo grado de precisión posible.

7. Encuentra x_0, c_1, x_1 tales que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2}f(x_0) + c_1f(x_1),$$

tenga el máximo grado de precisión posible.

8. Aproximar aplicando la regla de Simpson

$$\int_1^3 \int_1^2 \ln(x + 2y) dy dx.$$

9. Encontrar el valor de h para que el error de cuadratura con la regla del trapecio compuesto para las siguientes integrales sea menor que 10^{-4} .

(a) $\int_0^2 e^{x^2} dx$.

(b) $\int_0^1 \cos(\pi^2 x^2) dx$.

(c) $\int_0^2 (x+4)^{-1} dx$.

(d) $\int_1^2 x \ln x dx$.

10. Encontrar el valor de h para que el error de cuadratura con la regla de Simpson para las siguientes integrales sea menor que 10^{-4} .

(a) $\int_0^2 e^{x^2} dx$.

(b) $\int_0^1 \cos(\pi^2 x^2) dx$.

(c) $\int_0^2 (x+4)^{-1} dx$.

(d) $\int_1^2 x \ln x dx$.

11. Determinar a, b, c, d para que la siguiente fórmula de cuadratura sea de grado tres

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1).$$

12. Determinar a, b, c, d, e para que la siguiente fórmula de cuadratura sea de grado cuatro

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1).$$

13. Aproximar por la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^1 \sin(\pi x) dx, \quad \int_1^3 \ln x dx, \quad \int_1^2 e^{x^2} dx.$$

14. Demostrar que los pesos de las fórmulas de cuadratura gaussianas son siempre positivos.

15. Calcular mediante cuadratura adaptativa una aproximación con error estimado menor de 10^{-1} de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^1 (1+x^3)^{1/2} dx$

(c) $\int_0^2 (1+x^3)^{-1/2} dx$

(e) $\int_0^1 xe^x dx$

(b) $\int_1^2 (1+x^4)^{-1} dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$

(f) $\int_0^2 e^{x^2} dx$