Tema 1 Métodos directos de resolución de sistemas lineales

El objetivo de este tema es obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b, \quad A \in \mathcal{M}_{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

donde A es una matriz no singular y estudiar la dependencia de la solución de los errores en A y b.

En asignaturas anteriores (Álgebra Lineal II y Métodos Computacionales II), se ha estudiado cómo discutir y resolver el sistema por eliminación gaussiana. En este tema nos centraremos en resolver mediante factorización de matrices y en analizar los errores producidos al resolver un sistema.

Recordemos que la solución de un sistema lineal se puede obtener por la regla de Cramer. Sin embargo, este método es muy poco eficiente. En particular, si calculamos los determinantes por desarrollo de adjuntos (es decir, sin usar la eliminación gaussiana) se necesitarían más de $100!$ operaciones elementales para una matriz A de 100×100, lo que lo hace imposible de utilizar en la práctica.

Comenzaremos recordando algunos elementos del análisis matricial, después estudiaremos cómo resolver los sistemas mediante factorización de matrices y finalmente estudiaremos las normas matriciales y los errores en las soluciones de los sistemas lineales.

1.1 Elementos básicos del análisis matricial

En general, trabajaremos sobre los números complejos, pues los métodos iterativos (que estudiaremos en el siguiente tema), son más simples en este contexto.

Dado un vector columna v de $\mathbb{C}^n$, definimos su transpuesto conjugado como el vector fila tal que cada coordenada es la conjugada de la coordenada correspondiente de v y lo denotamos v^*.

Definimos el producto escalar de dos vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$ como v^*u. Es sencillo probar que es un producto interior. Además

$$v^*v = \|v\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}.$$

1.1.1 Matriz transpuesta conjugada

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ definiremos su transpuesta conjugada[1] como

$$A^* := (\overline{a}_{ji}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$$

Proposición 1.1

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Se verifica:

1. $A^{**} = A$.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
4. $(AC)^* = C^* A^*$.

[1] La matriz transpuesta conjugada también se denota A^H. En algunos textos se denomina matriz adjunta (no confundir con la matriz de los adjuntos) o hermitiano.

Demostración Ejercicio. □

Proposición 1.2

Si A es invertible, entonces A^* es invertible y se verifica

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Además, $\det A^* = \overline{\det A}$.

Demostración Ejercicio. □

Sean

$$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n, \quad I = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le n}.$$

Decimos que A es

- simétrica si es real y $A = A^t$.
- hermítica si $A = A^*$.
- ortogonal si es real y $AA^t = A^tA = I$.
- unitaria si $AA^* = A^*A = I$.
- normal si $AA^* = A^*A$.

1.1.2 Matrices triangulaes y diagonal dominantes

Atendiendo a la naturaleza de los elementos, definimos los siguientes tipos de matrices:

- A es diagonal si $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $1 \le i, j \le n$.
- A es triangular superior si $a_{ij} = 0$, $i > j$, $1 \le i, j \le n$.
- A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$, $i < j$, $1 \le i, j \le n$.
- A es (estrictamente) diagonal dominante si

$$|a_{ii}| \underset{(>)}{\ge} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \le i \le n.$$

Proposición 1.3

Toda matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

Demostración

Sea A estrictamente diagonal dominante. Para probar la existencia de inversa, vamos a aplicar Rouché-Frobenius. En particular, mostraremos que $Ax = 0$ tiene solución única (lo que implica rango máximo). Suponemos que no por reducción al absurdo (existe z tal que $Az = 0$ y $z \neq 0$). Sea i_0 el índice donde se alcanza el máximo de los módulos de los componentes de z (estrictamente positivo)

Como $Az = 0$, $\sum a_{ij}z_j = 0$. En particular para i_0, pero

$$\begin{aligned} |a_{i_0i_0}||z_{i_0}| &= |\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} a_{i_0j}z_j| \le \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}z_j| \le \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}||z_{i_0}| \\ &= |z_{i_0}| \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}| < |z_{i_0}||a_{i_0i_0}|. \end{aligned}$$

De esta contradicción, A es invertible.

□

✍ **Ejercicio 1.1** Obtener un ejemplo de una matriz diagonal dominante que no sea invertible.

1.1.3 Partición de matrices

Dada una matriz $D \in \mathcal{M}_n$, diremos que

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1k_D} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2k_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m_D1} & D_{m_D2} & \cdots & D_{m_Dk_D} \end{pmatrix},$$

es una partición de D si para cada $1 \leq i, j \leq n$, D_{ij} es una matriz con el mismo número de filas que $D_{i\bar{j}}$ para todo $\bar{j}$ y con el mismo número de columnas que $D_{\bar{i}j}$ para todo $\bar{i}$.

Supongamos que $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ son particiones de $A, B, C \in \mathcal{M}_n$.

Teorema 1.1

Si cada producto $A_{is}B_{sj}$ se puede formar y

$$C_{ij} = \sum_s A_{is}B_{sj},$$

entonces $C = AB$. ♡

Demostración Ejercicio. □

✍ **Ejercicio 1.2** Elegir dos matrices y comprobar el resultado. Se recomienda practicar este producto.

1.1.4 Autovalores y autovectores

Recordemos algunas definiciones y propiedades de los autovalores.

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se denomina

- Polinomio característico de A a $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Autovalores de A a las raíces del polinomio característico.
- Espectro de A, $\mathrm{Sp}(A)$, al conjunto de autovalores de A.
- Radio espectral de A, $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
- Autovector asociado a un autovalor $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ a todo vector v que satisfaga $Av = \lambda v$.

Proposición 1.4

1. *A es invertible si y sólo si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.*
2. *Para todo autovalor λ, $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)) > 0$ (todo autovalor tiene un autovector no nulo asociado).*
3. *$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$. En particular, el espectro es invariante por cambio de base.*
4. *Los autovectores asociados a un autovalor λ constituyen el subespacio vectorial $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, de dimensión menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico.*
5. *Si λ_1, λ_2 son dos autovalores distintos de A, entonces*

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \cap \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = \{0\}.$$

♠

Demostración

1. Trivial
2. Teorema de Rouché-Frobenius (el rango no puede ser máximo pues el determinante es nulo).
3. Sea v un autovector de AB con autovalor asociado λ. Entonces $ABv = \lambda v$. Luego

$$BA(Bv) = B\lambda v = \lambda Bv,$$

de donde Bv autovector de BA con autovalor asociado λ.

4. Si expresamos la matriz en una base tal que los primeros vectores son los autovectores asociados, entonces la aplicación tiene en la diagonal el autovalor, tantas veces como autovectores, luego la multiplicidad algebraica es mayor.
5. Sencilla (ejercicio). De hecho, los subespacios vectoriales asociados a los distintos autovectores están en suma directa. Si la suma de sus dimensiones es n, la matriz es diagonalizable.

$\square$

Proposición 1.5

1. *Los autovalores de una matriz hermítica son siempre reales.*
2. *Los autovalores de una matriz unitaria tienen módulo* 1.

Demostración Sea A, λ autovalor, v autovector.

1) Si A es hermítica:

$$\lambda v^* v = v^* \lambda v = v^* A v = v^* A^* v = (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \bar{\lambda} v^* v,$$

luego $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

2) Si A es unitaria:

$$|\lambda|^2 v^* v = \bar{\lambda}\lambda v^* v = \bar{\lambda} v^* \lambda v = (\lambda v)^* \lambda v = (Av)^* A v = v^* A^* A v = v^* v.$$

Entonces $|\lambda|^2 = 1$. $\square$

Corolario 1.1

Los autovalores de una matriz simétrica son reales.

1.1.5 Factorización de Schur

Se dice que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$ son semejantes si existe $P \in \mathbb{M}_n$ invertible, tal que

$$B = P^{-1} A P.$$

A y B son semejantes si y sólo si representan la misma aplicación lineal en dos bases distintas.

Proposición 1.6

Sean $A, B \in \mathbb{M}_n$ *matrices semejantes. Se verifica:*

- $\det A = \det B$.
- $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.
- $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$.

Demostración Se ha visto en asignaturas anteriores. $\square$

La descomposición de Schur muestra que toda matriz es semejante a una triangular superior mediante un cambio de variables unitario.

Teorema 1.2 (Descomposición de Schur)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Existe una matriz unitaria* U *tal que la matriz* $U^* A U$ *es triangular superior. Además los elementos de la diagonal son los autovalores de* A.
2. *(Teorema de Descomposición espectral)* A *es normal si y sólo si existe* U *(unitaria) tal que* $U^* A U$

es diagonal. ♡

Demostración

1) Por inducción.

Trivial si $n = 1$

Suponemos cierto hasta $n-1$. Sea λ_1 un autovalor de A y x_1 un autovector no nulo asociado a λ_1 normalizado, es decir: $\|x_1\|_2^2 = x_1^* x_1 = 1$, $Ax_1 = \lambda x_1$. Entonces, podemos extender x_1 hasta una base ortonormal (por ejemplo, con la ortonormalización de Gram-Schmidt), $x_2, ..., x_n$ de modo que la matriz X cuyas columnas son $x_1, ...x_n$ es unitaria. Es más, existe un vector u y una matriz $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ tal que

$$X^* A X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Por inducción existe U_1 tal que $U_1^* A_1 U_1$ es triangular superior y los elementos de la diagonal son los autovalores de A_1. Tomamos

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

U es unitaria (ejercicio). Entonces

$$\begin{aligned} U^* A U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{pmatrix} X^* A X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & u U_1 \\ 0 & U_1^* A U_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que es triangular superior. Por ser semejantes, A y $U^* A U$ tienen los mismos autovalores, que son los elementos de la diagonal de $U^* A U$.

2) Si A es normal, sea $R = U^* A U$. Entonces

$$R^* R = (U^* A U)^* (U^* A U) = U^* A^* A U = U^* A A^* U = (U^* A U)(U^* A^* U) = R R^*$$

Luego R es normal. Pero el elemento (1,1) de $R^* R = R R^*$ es

$$\bar{\lambda}_1 \lambda_1 = |\lambda_1|^2 = (RR^*)|\lambda_1|^2 + \sum_{k=2}^{n} |r_{1k}|^2.$$

Luego $r_{1k} = 0$, $k > 1$. Repitiendo el proceso, se obtiene que es diagonal.

Reciprocamente, si $U^* A U$ es diagonal, D, entonces $A = U D U^*$ y $A^* A = A A^*$.

□

✍ **Ejercicio 1.3** Usando la factorización de Schur, demostrar que la traza A es igual a la suma autovalores y que el determinante de A es el producto de los autovalores.

1.1.6 Matriz definida positiva

Una matriz hermítica $A \in \mathcal{M}_n$ es definida positiva (resp. semidefinida positiva) si

$$v^* A v > 0, \;\; v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \quad (\text{resp. } v^* A v \geq 0, \;\; v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}).$$

Proposición 1.7

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica. Se verifica:

1. *A es definida positiva si y sólo si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.*
2. *A es semidefinida positiva si y sólo si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.*

Demostración 1) Sea A def. positiva. Sea $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ y v un autovector asociado no nulo.

$$0 < v^* A v = v^* \lambda v = \lambda v^* v$$

Como $v^* v > 0$, tenemos que $\lambda > 0$.

Supongamos que A es hermítica y los autovalores son reales positivos. Por el Teorema de Schur existe U unitaria tal que

$$U^* A U = D = \mathrm{diag}([\lambda_1, \ldots, \lambda_n)]$$

Entonces para todo vector v no nulo, se verifica

$$v^* A v = v^* U D U^* v = (U^* v)^* D (U^* v) = w^* D w = \sum \lambda_i |w_i|^2 > 0.$$

2) Ejercicio. □

Proposición 1.8

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Entonces $A^* A$ es una matriz hermítica y semidefinida positiva.
Si además A es invertible, entonces $A^* A$ es definida positiva.

Demostración Se deja como ejercicio.

□

1.2 Normas matriciales

En esta sección veremos cómo extender el concepto de norma a las aplicaciones lineales. Para complementar esta sección, se puede consultar el libro de Infante y Rey.

1.2.1 Norma matricial

Una norma (vectorial) sobre $\mathcal{M}_n$ es una aplicación,

$$\|\cdot\| \colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad A \to \|A\|,$$

que verifica:

1. $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$.
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathcal{M}_n$.
3. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n$.

Decimos que es una norma matricial si además verifica

4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathcal{M}_n$.

Ejemplo 1.1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Podemos definir las siguientes normas (demostraremos más tarde que son normas matriciales):

- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

- $\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}$.
  Sin embargo
  $$\|A\| = \text{máx}_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$$

no es una norma matricial (ejercicio).

1.2.2 Normas matriciales compatibles e inducidas

Sea $\|\cdot\|_v$ una norma vectorial en $\mathbb{K}^n$ y $\|\cdot\|_M$ una norma matricial en $\mathcal{M}_n$.

Decimos que $\|\cdot\|_M$ es una norma matricial compatible si
$$\|Av\|_v \le \|A\|_M\|v\|_v, \quad \forall v\in\mathbb{K}^n,\ A\in\mathcal{M}_n.$$

Decimos que $\|\cdot\|_M$ es una norma matricial inducida si
$$\|A\|_M = \text{máx}_{v\neq 0}\frac{\|Av\|_v}{\|v\|_v} = \text{máx}_{\|v\|_v=1}\|Av\|_v, \quad \forall A\in\mathcal{M}_n.$$

Si $\|\cdot\|_M$ es una norma matricial inducida entonces $\|I\|_M = 1$.

Ejemplo 1.2 Las tres normas que más utilizaremos, $\|\|_1$, $\|\|_\infty$, $\|\|_2$, son inducidas (lo demostraremos después):

- $\|A\|_1$ inducida por $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$, $v\in\mathbb{K}^n$.
- $\|A\|_\infty$ inducida por $\|v\|_\infty = \text{máx}_{i=1}^n |v_i|$, $v\in\mathbb{K}^n$.
- $\|A\|_2$ inducida por $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$, $v\in\mathbb{K}^n$.
- La norma de Frobenius:
  $$\|A\| = \left(\sum_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \text{tr}(A^*A)^{1/2}$$
  no es una norma inducida.
  Es una norma matricial, pues es una norma vectorial (la norma euclídea, considerando las matrices como vectores) y cumple:
  $$\|AB\|^2 = \sum_{1\le i,j\le n}|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}|^2 \overset{(Des.Cauchy-Schwarz)}{\le} \sum_{1\le i,j\le n}\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\sum_{k=1}^n|b_{kj}|^2$$
  $$= \left(\sum_{1\le i,k\le n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{1\le k,j\le n}|b_{kj}|^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2.$$
  No es inducida pues $\|I\| = \sqrt{n}\neq 1$, y para toda norma inducida, $\|I\|_M = 1$.
  Es compatible con la norma euclídea (ejercicio).

Proposición 1.9

Toda norma vectorial es compatible con la matricial inducida, pero dada una norma matricial, existen infinitas normas compatibles con ella.

Demostración Basta considerar $\|v\|_v := \|vu^t\|_M$ para $u\neq 0$ fijo.

Ejc: comprobar que es una norma vectorial

Es compatible pues: $\|Av\|_v = \|(Av)u^t\|_M \le \|A\|_M\|vu^t\|_M = \|A\|_M\|v\|_v$.

□

Proposición 1.10

Si $\|\cdot\|_v$ es una norma vectorial sobre $\mathbb{K}^n$, entonces la norma inducida

$$\|A\|_M := \text{máx}_{\|v\|_v=1}\|Av\|_v$$

es una norma matricial, compatible con $\|\cdot\|_v$.

Demostración En primer lugar, está bien definida pues $x \to \|Ax\|_v$ es una función continua, luego alcanza su máximo en el compacto $\{\|v\|_v = 1\}$. Además, ambas normas son compatibles

$$\|A\|_M = \underset{v\neq 0}{\text{máx}} \frac{\|Av\|_v}{\|v\|_v} \geq \frac{\|Av\|_v}{\|v\|_v}$$

luego $\|Av\|_v \leq \|A\|_M\|v\|_v$ para todo $v \neq 0$.

Veamos que es una norma matricial. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$.

1. $\|A\|_M = 0$ sii máx $\|Av\|_v/\|v\|_v = 0$ sii $\|Av\|_v = 0$ sii $Av = 0$ sii $A = 0$.
2. Sea u de norma 1 donde se alcanza el supremo de $\|(A+B)v\|_v$
$$\|A+B\|_M = \|(A+B)u\|_v \leq \|Au\|_v + \|Bu\|_v \leq \|A\|_M\|u\|_v + \|B\|_M\|u\|_v = \|A\|_M + \|B\|_M.$$
3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces
$$\|\lambda A\|_M = \text{máx}\,\|\lambda Av\|_v = |\lambda|\,\text{máx}\,\|Av\|_v = |\lambda|\|A\|_M$$
4. Sea u de norma 1 donde se alcanza el supremo de $\|(AB)v\|_v$
$$\|AB\|_M = \|(AB)u\|_v \leq \|A\|_M\|Bu\|_v \leq \|A\|_M\|B\|_M\|u\|_v = \|A\|_M\|B\|_M.$$

□

1.2.3 Normas matriciales inducidas por las vectoriales

Proposición 1.11

1. *La norma inducida por $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$, $v \in \mathbb{K}^n$, es*
$$\|A\|_1 = \underset{1\leq j\leq n}{\text{máx}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$
2. *La norma inducida por $\|v\|_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n}|v_i|$, $v \in \mathbb{K}^n$, es*
$$\|A\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{\text{máx}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$
3. *La norma inducida por $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$, $v \in \mathbb{K}^n$, es*
$$\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}.$$

Demostración

1) Sea A una matriz. Sea y de norma 1 donde se alcance $\|A\|_1$,

$$\|A\|_1 = \|Ay\|_1 = \sum_i |\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j| \leq \sum_i\sum_j |a_{ij}y_j| = \sum_j |y_j| \sum_i |a_{ij}|$$
$$\leq \sum_j |y_j|(\underset{k}{\text{máx}} \sum_i |a_{ik}|) = (\underset{k}{\text{máx}} \sum_i |a_{ik}|)\|y\|_1 \leq \underset{k}{\text{máx}} \sum_i |a_{ik}|.$$

Por otra parte, supongamos que el $\max_k \sum_i |a_{ik}|$ se alcanza en el índice k_0 y consideremos el vector e_{k_0}

$$\|A\|_1 \geq \|Ae_{k_0}\|_1 = \sum_i |a_{ik_0}| = \max_{1\leq k\leq n} \sum_i |a_{ik}|$$

2) Sea A una matriz. Sea y de norma 1 donde se alcance $\|A\|_\infty$

$$\|A\|_\infty = \|Ay\|_\infty = \max_i |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}||y_j|$$
$$\leq \max_j |y_j| \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|y\|_\infty \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Por otra parte, supongamos que el $\max_i \sum_j |a_{ij}|$ se alcanza en el índice I. Consideremos el vector v definido por $v_j = \bar{a}_{Ij}/|a_{Ij}|$ si $a_{Ij} \neq 0$, $v_j = 0$ en caso contrario. Entonces $\|v\|_\infty = 1$, $\|Av\|_\infty \geq \sum_j |a_{Ij}|$

$$\|Av\|_\infty = \max_i |\sum_j a_{ij}v_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}||v_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Luego $\|Av\|_\infty =^* \sum_j |a_{Ij}| \leq \|A\|_\infty$.

3) Sabemos que los autovalores de A^*A son todos reales positivos o nulos. Además, por ser hermítica, el Teorema de Schur implica que existe una base ortonormal $\{u_1, ..., u_n\}$ formada por autovectores de A^*A (U). Sea y de norma 1 donde se alcanza $\max_{\|v\|=1} \|Av\|_2^2$. Si $y = \sum \alpha_i u_i$,

$$1 = \|y\|_2^2 = y^*y = (\sum \bar{\alpha}_i u_i^*)(\sum \alpha_j u_j) = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \alpha_j u_i^* u_j$$
$$= \sum_i \bar{\alpha}_i \alpha_i = \sum |\alpha_i|^2$$

Además

$$\|Ay\|_2^2 = (Ay)^*(Ay) = y^*A^*Ay = \sum_i \bar{\alpha}_i u_i^*(A^*A) \sum_j \alpha_j u_j = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \alpha_j u_i^*(A^*A)u_j =$$
$$= \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \alpha_j u_i^* \lambda_j u_j = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq \rho(A^*A) \sum |\alpha_i|^2 = \rho(A^*A).$$

Por otra parte, Sea λ_I el autovalor que da el radio espectral y u_I un autovector de norma 1 asociado.

$$\max_{\|v\|=1} \|Av\|_2^2 \geq \|Au_I\|_2^2 = (Au_I)^*(Au_I) = u_I^*(A^*A)u_I = u_I^*\lambda_I u_I$$
$$= \lambda_I |u_I|^2 = \lambda_I = \rho(A^*A).$$

$\square$

1.2.4 Error y condicionamiento

Sea $\tilde{x}$ una solución aproximada de $Ax = b$. Definimos el *vector de error* como

$$x_\delta = \tilde{x} - x,$$

donde x es la solución exacta del problema.

Definimos el *vector de error residual* como

$$b_\delta = A\tilde{x} - b.$$

Nótese que $Ax_\delta = b_\delta$.

Fijada una norma, definimos los errores relativos asociados a los errores anteriores como

$$E = \frac{\|x_\delta\|}{\|x\|}, \quad R = \frac{\|b_\delta\|}{\|b\|}.$$

Consideremos una norma matricial inducida por una vectorial (denotaremos ambas como $\|\cdot\|$).

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Denominamos *condicionamiento* de A respecto a la norma $\|\cdot\|$ a

$$\operatorname{cond}(A) := \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Proposición 1.12

Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida y $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz invertible. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{cond}(A) \geq 1$.
2. $\operatorname{cond}(A) = \operatorname{cond}(A^{-1})$.
3. $\operatorname{cond}(\lambda A) = \operatorname{cond}(A)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Demostración 1. $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$.

2 y 3 triviales (ejercicio). □

Teorema 1.3

Sean $b, b_\delta \in \mathbb{R}^n$ no idénticamente nulos. Denotemos x y $x + x_\delta$ a las soluciones respectivas de los sistemas lineales

$$Ax = b \quad A(x + x_\delta) = b + b_\delta.$$

Entonces se verifica

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)}\frac{\|b_\delta\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x_\delta\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|b_\delta\|}{\|b\|}$$

Además, para toda matriz A invertible, existen $b, b_\delta \in \mathbb{R}^n$ no idénticamente nulos tal que las desigualdades se alcanzan.

Demostración De $A(x + x_\delta) = b + b_\delta$, tenemos que $x_\delta = A^{-1}b_\delta$.

Entonces $\|x_\delta\| \leq \|A^{-1}\|\|b_\delta\|$

Por otra parte, $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$, entonces $1/\|x\| \leq \|A\|/\|b\|$.

Juntando ambas desigualdades tenemos la que queremos.

Por otra parte, por definición de norma inducida, existe x tal que $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$. Definimos $b = Ax$ para este x.

De nuevo por definición de norma inducida, existe b_δ tal que $\|A^{-1}b_\delta\| = \|A^{-1}\|\|b_\delta\|$.

Para los sistemas lineales $Ax = b$ y $A(x + x_\delta) = b + b_\delta$, tenemos que $x_\delta = A^{-1}b_\delta$, luego $\|x_\delta\| = \|A^{-1}\|\|b_\delta\|$ y $\|A\|\|x\| = \|b\|$ y de ahí se sigue la igualdad.

□

Teorema 1.4 (ver [1, p. 62])

Sean $b, b_\delta \in \mathbb{R}^n$ no identicamente nulos, $A, A_\delta \in \mathcal{M}_n$ tales que A y $A + A_\delta$ son matrices invertibles y denotemos x y $x + x_\delta$ a las soluciones respectivas de

$$Ax = b, \quad (A + A_\delta)(x + x_\delta) = b + b_\delta.$$

Entonces se verifica

$$\frac{\|x_\delta\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\|A_\delta\|/\|A\|}\left(\frac{\|b_\delta\|}{\|b\|}+\frac{\|A_\delta\|}{\|A\|}\right)$$

♡

1.3 Factorización de matrices

El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ son conocidos.

1.3.1 Orden de una sucesión

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ es del orden menor o igual que otra sucesión $\{y_n\}$ si existen constantes C, N tales que $|x_n| < C|y_n|$ para $n > N$ y lo denotamos

$$\{x_n\} = \mathcal{O}(\{y_n\}) \quad (\{x_n\} \in \mathcal{O}(\{y_n\})).$$

Decimos que dos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ son del mismo orden, y lo denotamos $\{x_n\} = \Theta(\{y_n\})$ si

$$\{x_n\} = \mathcal{O}(\{y_n\}), \quad \{y_n\} = \mathcal{O}(\{x_n\}).$$

Decimos que el orden de $\{x_n\}$ es estrictamente menor que el de $\{y_n\}$ si $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$ y lo denotamos $\{x_n\} = o(\{y_n\})$.

Ejemplo 1.3 Es fácil comprobar que

$$\{n\}, \{100n\}, \{n+1\}, \{n^2+n\} = \mathcal{O}(\{n^2\}).$$

Sin embargo $\{n^2\} \neq \mathcal{O}(\{n\})$. Es más, si p es un polinomio de grado k, entonces

$$p(n) = \Theta(n^k).$$

✍ **Ejercicio 1.4** Probar que si $x_n = 2x_{n-1}+1$, $x_0 = 1$, entonces

$$\{x_n\} = \mathcal{O}(2^n).$$

✍ **Ejercicio 1.5** Probar que si x_n es el número de cifras en base 10 de n, entonces

$$\{x_n\} = \mathcal{O}(\ln n).$$

1.3.2 Sistemas fáciles de resolver

Consideremos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ son conocidos.

Para ciertas matrices $\mathbf{A}$ el sistema es fácil de resolver:

1. $\mathbf{A}$ diagonal. El número de operaciones está en $\mathcal{O}(n)$.
2. $\mathbf{A}$ triangular superior. Por sustitución regresiva. El número de operaciones está en $\mathcal{O}(n^2)$.
3. $\mathbf{A}$ triangular inferior. Por sustitución progresiva. El número de operaciones está en $\mathcal{O}(n^2)$.
4. $\mathbf{A}$ ortogonal o unitaria. Multiplicando por su traspuesta o traspuesta conjugada. El número de operaciones está en $\mathcal{O}(n^2)$.

1.3.3 Factorización de matrices

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ factoriza como producto de varias matrices

$$\mathbf{A} = \mathbf{M_1 M_2 \ldots M_k},$$

de modo que las matrices $\mathbf{M_i}$ se correspondan con matrices de sistemas “fáciles de resolver”.

Entonces, podemos resolver el sistema recursivamente:

$$\mathbf{M_1 y_1} = \mathbf{b}, \mathbf{M_2 y_2} = \mathbf{y_1}, \ldots \mathbf{M_k y_k} = \mathbf{y_{k-1}},$$

y tendremos que la solución es $\mathbf{x} = \mathbf{y_k}$.

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \mathbf{M_1 M_2}$, basta resolver $\mathbf{M_1 y} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{M_2 x} = \mathbf{y}$.

Ejercicio 1.6

Resolver el sistema $Ax = b$, con $b = (1, 1, 0)$ y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

sabiendo que su factorización de Schur es $A = URU^*$ con

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Factorización LU

Decimos que una matriz invertible $\mathbf{A}$ admite una factorización LU si se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

donde

- $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior ($l_{ij} = 0$ si $i < j$).
- $\mathbf{U}$ es una matriz triangular superior ($u_{ij} = 0$ si $i > j$).

Si conocemos una factorización LU de una matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, podemos resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con el siguiente procedimiento:

- Resolvermos mediante sustitución progresiva el sistema

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}.$$

- Obtenemos la solución $\mathbf{x}$ resolviendo por sustitución regresiva el sistema

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}.$$

También es útil para calcular el determinante, inversas, etc.

Obtener una factorización LU de una matriz $\mathbf{A}$ es equivalente a resolver el sistema

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

donde los elementos de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son las incógnitas.

Tenemos n^2 ecuaciones y $n^2 + n$ incógnitas.

Debemos fijar n condiciones. Algunas posibilidades:

- Factorización de Doolittle, si L es triangular inferior unitaria.

- Factorización de Crout, si U es triangular superior unitaria.

Por omisión, se considerará que la factorización LU es la de Doolittle.

Teorema 1.5

Si los n menores principales de la matriz $A \in \mathcal{M}_n$ son no singulares, entonces la matriz A admite una factorización LU. ♡

Demostración

Por inducción $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ y estos son no singulares.
Ahora planteamos $L_{n-1}(u_{1,n}...u_{n-1,n}) = (a_{1,n}...a_{n-1,n})$ que es resoluble por ser L_{n-1} no singular.
Lo mismo para $(l_{n,1}...ln, n-1)U_{n-1} = (a_{n,1}...a_{n,n-1})$
Por último $a_{n,n} = \sum_{s=1}^{n-1} l_{n,s}u_{s,n} + l_{n,n}u_{n,n}$ y de ahí despejamos $u_{n,n}$ (tomamos $l_{n,n} = 1$). □

1.3.5 Factorización LU con pivoteo

Dada $\sigma \in S_n$, denominamos **matriz de permutaciones asociada a** σ a la matriz

$$P = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \dots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n$, $\mathbf{PA}$ permuta por σ las filas de $\mathbf{A}$.

Lema 1.1

Sea P una matriz de permutaciones. Entonces en cada fila y en cada columna de P hay un único 1 y el resto de posiciones contienen ceros. Además, $\det(P) = \operatorname{sig}(\sigma)$ y

$$PP^t = P^tP = I.$$ ♡

Demostración Basta escribir P como producto de matrices correspondientes a trasposiciones de filas. Su inversa es ella misma y al trasponer intercambiamos los productos. □

Definición 1.1

Decimos que $A \in \mathcal{M}_n$ admite una factorización LU con pivoteo si existen

1. *una matriz de permutación P,*
2. *una matriz triangular inferior $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, con $l_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$ y $|l_{ij}| \leq 1$ $1 \leq i,j \leq n$,*
3. *una matriz triangular superior U invertible*

tales que $PA = LU$. ♣

Si A admite una factorización LU con pivoteo entonces A factoriza como $A = P^tLU$.

Vamos a probar que siempre que la matriz sea invertible, existe dicha factorización.

Teorema 1.6

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n$ invertible admite una factorización LU con pivoteo. ♡

Demostración

Decimos que P_k, L_k, U_k son una factorización LU con pivoteo de A hasta el paso k si $P_kA = L_kU_k$ y

1. P_k es una matriz de permutaciones.

2. L_k es una matriz triangular inferior tal que $L_k = (l_{ij}^{(k)})$, $l_{ii}^{(k)} = 1$, $1 \leq i \leq n$, $|l_{ij}^{(k)}| \leq 1$, $1 \leq i, j \leq n$, y $l_{ij}^{(k)} = 0$ para $i > k$, $i \neq j$.
3. U_k es “triangular superior hasta la fila k tal que $U_k = (u_{ij}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$ y $u_{ij}^{(k)} = 0$ si $j < i \leq k$.

Sea k el mayor valor para el que tenemos la factorización anterior. Veamos que $k = n$. Supongamos que $k < n$.

En primer lugar, si $u_{jk}^{k} = 0$ para todo $j \geq k$, es fácil probar que $det(U_k) = 0$ y llegamos a contradicción.

Sea l tal que $|u_{lk}^{(k)}| = \max\{|u_{jk}^{(k)} : j \geq k\}$. Entonces, si P_{kl} es la matriz que permuta las filas k y l, tenemos que

$$P_{kl}P_kA = (P_{kl}L_kP_{kl})(P_{kl}U_k).$$

Si denotamos

$$P_{k+1} = P_{kl}P_k, \quad \tilde{L}_k = (P_{kl}L_kP_{kl}), \quad \tilde{U}_k = (P_{kl}U_k)$$

entonces $P_{k+1}A = \tilde{L}_k\tilde{U}_k$ y $P_{k+1}, \tilde{L}_k, \tilde{U}_k$ es una factorización LU de $P^{k+1}A$ hasta el paso k, pero ahora $|\tilde{u}_{kk}^{k}| = \max\{|\tilde{u}_{jk}^{k}| : j \geq k\}$. Entonces, por la factorización LU usual, existen matrices L_{k+1} y U_{k+1}, tales que si $P_{k+1} = P_{kl}P_k$, se verifica que $P_{k+1}A = L_{k+1}U_{k+1}$ con las propiedades buscadas, luego $k = n$.

$\square$

1.3.5.1 Algoritmo para obtener la factorización LU con pivoteo

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Definimos las matrices $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)}), L^{(k)} = (l_{ij}^{(k)}), U^{(k)} = (u_{ij}^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, determinadas de la siguiente manera:

$$P^{(0)} = L^{(0)} = Id, \quad U^{(0)} = A.$$

Para cada $k = 1, \ldots, n-1$

1. Sea $\tau = (k, s)$, $s \geq k$ de modo que $|u_{i,k}^{k-1}| \leq |u_{s,k}^{k-1}|$.
2. Definimos $P^{(k)}$ como la matriz obtenida de $P^{(k-1)}$ permutando las filas k y s.
3. Definimos $\tilde{L}^{(k)} = (\tilde{l}_{ij}^{(k)})$ como la matriz obtenida de $L^{(k-1)}$ permutando las filas k y s, excepto los elementos de la diagonal.
4. Definimos $l_{ik}^{(k)} = \tilde{u}_{ik}^{(k)} / \tilde{u}_{kk}^{(k)}$, $j = k+1, \ldots, n$ y $l_{ij}^{(k)} = \tilde{l}_{ij}^{(k)}$ para el resto.
5. Definimos
$$u_{ij}^{(k)} = \tilde{u}_{ij}^{(k)} - \frac{\tilde{u}_{ik}^{(k)}}{\tilde{u}_{kk}^{(k)}}\tilde{u}_{kj}^{(k)}, \quad k+1 \leq i \leq n, \ k \leq j \leq n.$$
y $u_{ij}^{(k)} = \tilde{u}_{ij}^{(k)}$ para el resto.

La factorización buscada es $P = P^{(n-1)}$, $L = L^{(n-1)}$, $U = U^{(n-1)}$.

Ejemplo 1.4

Tomemos la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tomamos para el primer paso las matrices:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}5&-1&-1&1\\-2&1&1&2\\18&1&2&3\\5&-2&1&4\end{pmatrix}$$

Permutamos la fila 1 y 3 de $\mathbf{U}$ y de $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}18&1&2&3\\-2&1&1&2\\5&-1&-1&1\\5&-2&1&4\end{pmatrix}$$

Ahora hacemos cero debajo de la diagonal y guardamos los multiplicadores en $\mathbf{L}$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{9}&1&0&0\\\frac{5}{18}&0&1&0\\\frac{5}{18}&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}18&1&2&3\\0&\frac{10}{9}&\frac{11}{9}&\frac{7}{3}\\0&-\frac{23}{18}&-\frac{14}{9}&\frac{1}{6}\\0&-\frac{41}{18}&\frac{4}{9}&\frac{19}{6}\end{pmatrix}$$

Permutamos las filas 2 y 4 de $\mathbf{U}$ y de $\mathbf{P}$ y las de $\mathbf{L}$ pero omitiendo la diagonal.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{5}{18}&1&0&0\\\frac{5}{18}&0&1&0\\-\frac{1}{9}&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}18&1&2&3\\0&-\frac{41}{18}&\frac{4}{9}&\frac{19}{6}\\0&-\frac{23}{18}&-\frac{14}{9}&\frac{1}{6}\\0&\frac{10}{9}&\frac{11}{9}&\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos cero debajo de la diagonal ($\mathbf{P}$ permanece inalterado)

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{5}{18}&1&0&0\\\frac{5}{18}&\frac{23}{41}&1&0\\-\frac{1}{9}&-\frac{20}{41}&-\frac{59}{74}&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}18&1&2&3\\0&-\frac{41}{18}&\frac{4}{9}&\frac{19}{6}\\0&0&-\frac{74}{41}&-\frac{66}{41}\\0&0&0&\frac{96}{37}\end{pmatrix}$$

✍ **Ejercicio 1.7**

Obtener la factorización LU con pivote de

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/2&5&0\\1&6&-6\\1/3&5&0\end{pmatrix}$$

1.3.6 Factorización de Cholesky

Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Decimos que A admite una *factorización LU de Cholesky* si existe una matriz **real** triangular inferior $\mathbf{L}$ tal que los elementos de su diagonal son positivos y

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}\mathbf{L}^{\top}.$$

Teorema 1.7

Una matriz $\mathbf{A}$ real es simétrica y definida positiva si y sólo si admite una factorización LU de Choleski. ♡

Demostración Supongamos que A es simétrica y definida positiva. En particular, los menores principales han de ser no nulos. Por lo que admite una factorización LU.

Por ser simétrica, veamos que admite una factorización LDL^t:

$$LU = A = A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

Como L es invertible, $U = L^{-1}U^tL^t$. Luego $U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^t$, pero entonces ha de ser triangular inferior y superior, luego es diagonal. Sea

$$D = U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^t.$$

Es más, $U = DL^t$, luego $A = LDL^t$.

Como A es definida positiva, tenemos que D también ha de serlo (escribir $D = L^{-1}A(L^{-1})^t$ y aplicar def. pos de A a e_k) Entonces podemos definir $D^{1/2}$ y $\tilde{L} = LD^{1/2}$. Tenemos $A = \tilde{L}(\tilde{L})^t$

Recíprocamente, si $A = LL^t$, entonces,

$$v^tAv = v^tLL^tv = \|v^tL\|_2^2.$$

$\square$

Ejemplo 1.5

Consideremos la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Como es simétrica, calculamos su factorización:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Luego es definida positiva.)