Tema 2 Métodos iterativos para sistemas lineales

Los métodos directos que hemos estudiado tienen inconvenientes si se aplican a sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones, porque requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo. Además, son especialmente poco prácticos cuando las matrices son dispersas, es decir, tienen muchos ceros. Veremos que estos problemas se pueden resolver con los métodos iterativos.

Por otra parte, veremos métodos iterativos para el cálculo de los autovalores y autovectores de una matriz.

2.1 Sucesiones de matrices

Una sucesión de matrices $\{A_r\}_{r=1,2,\ldots}$, $A_r \in \mathcal{M}_n$ se dice que converge a la matriz $A \in \mathcal{M}_n$ si para una (cualquier) norma matricial

$$\lim_{r\to\infty} \|A_r - A\| = 0.$$

Proposición 2.1

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Entonces se verifica

1. *$\rho(A) \leq \|A\|$ para toda norma matricial.*
2. *Para todo $\epsilon > 0$, existe una norma matricial inducida $\|\cdot\|$ tal que*

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

♠

Demostración

1) Sea λ_0 el autovalor que da el radio espectral y sea v un autovalor asociado no nulo.

Sea u un vector tal que $vu^t \neq 0$. Entonces

$$|\lambda_0|\|vu^t\| = \|\lambda_0 vu^t\| = \|Avu^t\| \leq \|A\|\|vu^t\|,$$

luego $\rho(A) = |\lambda_0| \leq \|A\|$

2) Dada A, por el Teorema de Schur, existe U (invertible) tal que $U^{-1}AU$ es triangular superior.

Nótese que los elementos de la diagonal de $U^{-1}AU$ son los autovalores de A. Es decir

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ tal que para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\sum_{j=i+1}^{n} |\delta^{j-i} u_{ij}| = |\delta| \sum_{j=i+1}^{n} |\delta^{j-i-1} u_{ij}| \leq \epsilon$$

Construimos la matriz $D_\delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^{n-1})$

Entonces

$$C = (UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta u_{12} & \ldots & \delta^{n-1} u_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta u_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego la aplicación

$$\|\cdot\|: \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}, \quad \|B\|_R := \|(UD_\delta)^{-1}B(UD_\delta)\|_\infty$$

es una norma matricial (inducida por $\|v\| := \|(UD_\delta)^{-1}v\|_\infty$) que verifica

$$\|A\| = \|UD_\delta)^{-1}B(U_\delta)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

Es decir,

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \left(|\lambda_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |\delta^{j-i}u_{ij}| \right) \leq \epsilon + \max \lambda_i = \epsilon + \rho(A).$$

□

Teorema 2.1

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Son equivalentes:

1. $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$
2. $\lim_{k\to\infty} A^k v = 0$, *para todo* $v \in \mathbb{C}^n$.
3. $\rho(A) < 1$.
4. *Existe una norma matricial (inducida) tal que* $\|A\| < 1$.

♡

Demostración

$1 \Rightarrow 2$ Sea $\|\cdot\|_v$ una norma vectorial y $\|\cdot\|_M$ la norma matricial inducida. Entonces $\|A^k v\|_v \leq \|A^k\|_M \|v\|_v$.
Luego $\lim_{k\to\infty} \|A^k v\|_v \leq \lim_{k\to\infty} \|A^k\|_M \|v\|_v = 0$.

$2 \Rightarrow 3$ Supongamos que $\rho(A) \geq 1$ entonces existe un autovalor λ tal que $|\lambda| \geq 1$
Sea v un autovector no nulo asociado $A^k v = \lambda^k v$
Luego $\|A^k v\|_v = |\lambda|^k \|v\| \geq \|v\|$, en contradicción con que la sucesión converge a cero

$3 \Rightarrow 4$ Supongamos $\|A\| \geq 1$ para toda norma matricial
Existe una norma matricial inducida tal que $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.
Luego $1 \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$. Tomando límite, $\rho(A) \geq 1$.

$4 \Rightarrow 1$ Supongamos que existe una norma tal que $\|A\| < 1$. Para dicha norma $\|A^k\| \leq \|A\|^k \to 0$.

□

Teorema 2.2

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

♡

Demostración

Por una parte, $\rho(A) \leq \|A\|$. Además, si λ es autovalor de A, entonces λ^k autovalor de A^k.
Luego, para todo k, $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$. Por tanto

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$$

Por otra parte, para cada $\epsilon > 0$ consideramos la matriz

$$A_\epsilon = \frac{1}{\rho(A) + \epsilon} A.$$

Entonces $\rho(A_\epsilon) < 1$. Por el Teorema anterior, $A_\epsilon^k \to 0$. Por definición de convergencia, existe $K > 0$ tal que $\|A_\epsilon^k\| < 1$ para todo $k > K_\epsilon$.

Luego para todo $k > K_\epsilon$

$$\|A_\epsilon^k\| = \frac{1}{(\rho(A)+\epsilon)^k}\|A^k\| < 1.$$

De donde $\|A^k\| < (\rho(A)+\epsilon)^k$. Luego para todo $k > K_\epsilon$,

$$\|A^k\|^{1/k} < \rho(A)+\epsilon.$$

Tomando límite en k, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \le \rho(A)+\epsilon, \qquad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Luego

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

□

Finalmente, recordemos el Teorema del punto fijo de Banach que necesitaremos posteriormente.

Teorema 2.3 (Teorema del punto fijo de Banach)

Sea $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación contractiva (es decir, existe $K < 1$ tal que $\|T(y)-T(x)\| \le K\|y-x\|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}^n$). Entonces existe un único punto fijo de T, $z \in \mathbb{K}^n$.

Es más, para cualquier $x_0 \in \mathbb{K}^n$, sea $\{x_k\}$ la sucesión definida por

$$x_{k+1} = T(x_k), \quad n > 0.$$

Entonces se verifica

$$\lim_{k\to\infty} x_k = z.$$

2.2 Métodos iterativos para resolución de sistemas

Los métodos directos que hemos estudiado tienen inconvenientes si se aplican a sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones, porque requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo.

Los métodos iterativos están especialmente indicados en la resolución de este tipo de sistemas, o en aquellos en las que las matrices son dispersas (poseen muchos ceros).

Consisten en definir una sucesión de puntos $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, ... que converjan a la sucesión del sistema. Para aplicarlo, escribiremos $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$. Entonces

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{M}-\mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$$

Eligiendo una matriz M que sea fácil de resolver, podemos aplicar el método del punto fijo partiendo de un vector x_0 y calculando los siguientes vectores de modo recursivo resolviendo el sistema

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b.$$

Esto es equivalente a $x_{k+1} = G(x_k)$, donde

$$G(x) = M^{-1}(Nx+b).$$

Como

$$\|G(y)-G(x)\| \le \|M^{-1}N\|\|y-x\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{K}^n,$$

si $\|M^{-1}N\| < 1$, entonces la función G es contractiva.

Teorema 2.4

Sean $A, M, N \in \mathcal{M}_n$ tales que M es invertible y $A = M - N$. Dado $x_0 \in \mathbb{K}^n$, definimos la sucesión $x_{k+1} = G(x_k)$, donde $G(x) = M^{-1}(Nx + b)$.
Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión anterior converja para todo valor inicial (a un punto fijo de G) es

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

♡

Demostración En primer lugar, si $\rho(M^{-1}N) < 1$, entonces existe una norma matricial inducida tal que $\|M^{-1}N\| < 1$. Así que G es contractiva y la sucesión converge al único punto fijo de G.

Recíprocamente, si la sucesión del punto fijo converge a x para cualquier punto inicial x_0, como

$$x_{k+1} - x = M^{-1}N(x_k + b) - M^{-1}N(x + b) = M^{-1}N(x_k - x),$$

entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} x_k - x = \lim_{n\to\infty} \left(M^{-1}N\right)^k (x_0 - x).$$

Nótese que $x_0 - x$ es cualquier punto de $\mathbb{K}^n$. Luego $\rho(M^{-1}N) < 1$.

□

2.2.1 Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

El **método de iteración de Jacobi** consiste en definir M como una matriz diagonal con la misma diagonal que A y

$$\mathbf{N} = M - A$$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial $\mathbf{x}_0$ y definiendo

$$\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = N\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \ k \geq 0$$

Nótese que en este caso, M^{-1} es una matriz diagonal tal que el i-ésimo elemento de su diagonal es a_{ii}^{-1}, $1 \leq i \leq n$.

El **método de iteración de Gauss-Seidel** se obtiene al tomar M como una matriz triangular inferior cuyos elementos no nulos coinciden con los de A, es decir, si $A = (a_{ij})$ y $M = (m_{ij})$, entonces $m_{ij} = a_{ij}$ si $i \geq j$ y $m_{ij} = 0$ si $i < j$.

La matriz $N = (n_{ij}) = M - A$ verifica $n_{ij} = -a_{ij}$ si $i < j$ y $n_{ij} = 0$ si $i \geq j$.

La sucesión se construye partiendo de un valor inicial $\mathbf{x}_0$ y definiendo

$$\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = N\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \ k \geq 0$$

Ejemplo 2.1

Ejemplo 4: Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x + 6y - 2z &= 15 \\ 4x - 3y + 8z &= 1 \end{aligned}, \text{ con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de un valor inicial

$$\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$$

El método de Jacobi consiste en definir

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b},\ k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ 6y_{k+1} &= -x_k + 2z_k + 15 \\ 8z_{k+1} &= -4x_k + 3y_k + 1 \end{aligned}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$, $\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{aligned}$

Ejemplo 2.2 Para el método de Jacobi, tenemos:

- $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$
- $\mathbf{x}_1 = (4{,}5, 2{,}5, 0{,}125)$
- $\mathbf{x}_2 = (5{,}75, 1{,}7916667, -1{,}1875)$
- $\mathbf{x}_3 = (5{,}3958333, 1{,}14583333, -2{,}078125)$
- $\mathbf{x}_4 = (5{,}07291667, 0{,}90798611, -2{,}14322917)$

Nótese que, en este caso, el sistema es resoluble, y la solución real es $(5,1,-2)$, hacia la cual converge la sucesión creada por el método.

Ejemplo 2.3

El método de Gauss-Seidel consiste en definir

$$(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b},\ k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ x_{k+1} + 6y_{k+1} &= 2z_k + 15 \\ 4x_{k+1} - 3y_{k+1} + 8z_{k+1} &= 1 \end{aligned}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$, $\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 \\ 6y_1 &= -x_1 + 2z_0 + 15 \\ 8z_1 &= -4x_1 + 3y_1 + 1 \end{aligned}$

Para el método de Gauss-Seidel, tenemos:

- $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$
- $\mathbf{x}_1 = (4{,}5, 1{,}75, -1{,}46875)$
- $\mathbf{x}_2 = (5{,}375, 1{,}11458333, -2{,}14453125)$
- $\mathbf{x}_3 = (5{,}05729167, 0{,}94227430, -2{,}05029297)$
- $\mathbf{x}_4 = (4{,}97113715, 0{,}98804615, -1{,}99005127)$

2.2.1.1 Convergencia de los métodos iterativos

Teorema 2.5

Dado el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, si $\mathbf{A}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces existe una única solución del sistema y los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel producen una sucesión de vectores que converge a dicha solución. ♡

Demostración Para el método de Jacobi, basta calcular la norma infinito de $M^{-1}N$. Como A es estrictamente diagonal dominante, se obtiene que $\|M^{-1}N\|_\infty < 1$. Luego es contractiva.

Para el método de Gauss-Seidel, vamos a probar que todos los autovalores de $M^{-1}N$ tienen módulo menor que 1.

Sea $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un autovector de $M^{-1}N$ de norma infinito 1 y autovalor λ.

$$M^{-1}Nv = \lambda v, \quad \text{i.e.} \quad Nv = \lambda Mv.$$

Sea i tal que $v_i = 1$ (si es necesario, cambiamos de signo el autovector). Entonces

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j.$$

Luego

$$|\lambda| = \left| \frac{-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j}{\sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j} \right| < \frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} < 1.$$

□

2.2.2 Criterio de parada

Consideremos un método iterativo de la forma

$$Mx^{(n+1)} = Nx^{(n)} + b,$$

donde $x^{(0)}$ es el punto inicial escogido, $B = M^{-1}N$ la matriz del método y b un vector constante.

Denotemos $\delta_k = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$. Si $\epsilon^{(k+1)} = \|x - x^{(k+1)}\|$, entonces una estimación para dicho valor es

$$\epsilon^{(k+1)} \approx \frac{\delta_{k+1}^2}{\delta_k - \delta_{k+1}}.$$

Vamos a justificar dicho critero. Si x es la solución, y denotamos $\epsilon_{k+1} = x - x^{(k+1)}$ tenemos

$$\epsilon_{k+1} = \|x - x^{(k+1)}\| = \|M^{-1}(Nx + b) - M^{-1}(Nx^{(k)} + b)\| \leq \|B\|\|x - x^{(k)}\|.$$

Por la desigualdad triangular,

$$\|x - x^{(k+1)}\| \leq \|B\|\|x - x^{(k)}\| \leq \|B\| \left(\|x - x^{(k+1)}\| + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \right).$$

Despejando

$$|\epsilon_{k+1}| \leq \|B\|/(1 - \|B\|)\delta_{k+1}.$$

Por otra parte, podemos estimar $\|B\|$ del siguiente modo:

$$\delta_{k+1} = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|M^{-1}(Nx^{(k)} + b) - M^{-1}(Nx^{(k-1)} + b)\| = \|Bx^{(k)} - Bx^{(k-1)}\| \leq \|B\|\delta_k$$

De aquí,

$$\|B\| \geq \delta_{k+1}/\delta_k.$$

Tomando la estimación $\|B\| \approx \delta_{k+1}/\delta_k$ y sustituyendo en la desigualdad anterior, tenemos el resultado buscado.

2.3 Métodos iterativos para el cálculo de autovalores y autovectores

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz. Recordemos que sus autovalores pueden ser calculados como las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

y, dado un autovalor λ, podemos calcular su autovector asociado como la solución del sistema lineal homogéneo (singular)

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Sin embargo estos problemas (en especial el primero) están mal condicionados. Por ello, estudiaremos métodos para determinar directamente los autovalores.

Teorema 2.6 (Teorema de Gershgorin)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La unión de todos los discos

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} \colon |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ik}|\}$$

contiene todos los autovalores de la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. ♡

Demostración Sea λ un autovalor y v un autovector asociado. Entonces

$$Av = \lambda v.$$

En particular $\lambda v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$.

Sea i la coordenada donde se alcanza $\|v\|_\infty$. Podemos suponer que $v_i = 1$ y $|v_j| \leq 1$ para todo $j \neq i$. Entonces

$$|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda - a_{ii})v_i| = |\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Es decir, $\lambda \in K_i$. □

Corolario 2.1

Si la unión $M_1 = \cup_{j=1}^{m} K_{i_j}$ de m discos K_{i_j} $j = 1, \ldots, m$ y la unión M_2 de los discos restantes son disjuntas, entonces M_1 contiene exactamente m autovalores de A. ♡

Demostración (Necesita variable compleja)

Mediante permutaciones de filas y columnas, podemos asumir que los índices de M_1 son $1, \ldots, m$.

Sea D la matriz diagonal con la misma diagonal que A y $B = A - D$. Consideremos $A_t = D + tB$. Los autovalores de A_t son funciones continuas respecto de t, ya que son los ceros del polinomio característico (válido únicamente si son simples, si no, hay que hacer una construcción un poco más delicada). Aplicando el Teorema de Gershgorin a la matriz A_t, se obtiene que, para $t = 0$, los primeros m autovalores pertenecen a M_1. Como para todo t en un camino que una 0 y 1 y evite los autovalores múltiples, los autovalores $\lambda_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, pertenecen a la unión de M_1 y M_2 y $\lambda_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, es un conexo, tenemos que $\lambda_i(t) \in M_1$.

□

2.3.1 Métodos para calcular un autovalor

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y supongamos que sus autovalores, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verifican

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

y que existen n autovectores linealmente independientes, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (tal que $Au_i = \lambda_i u_i$).

Sea $x_0 = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, con α_1 y consideremos la sucesión $\{x_k\}$ definida por

$$x_k = A^k x_0.$$

Entonces

$$x_k = \lambda_1^k \left(\alpha_1 u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \alpha_2 u_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \alpha_n u_n \right).$$

Es decir, para k suficientemente grande, se verifica

$$x_{k+1} \approx \lambda_1 x_k.$$

Para obtener el valor de λ_1, basta aplicar a ambos términos una función lineal $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, por ejemplo:

1. Método de Rayleigh
$$\lambda_1 \approx \frac{x_k^* x_{k+1}}{x_k^* x_k}.$$
2. Sea j la posición de la mayor coordenada en módulo de x_k, entonces
$$\lambda_1 \approx \frac{e_j^* x_{k+1}}{e_j^* x_k}.$$

El método de la potencia también permite calcular un vector propio asociado a λ_1. Conocido λ_1, se verifica que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 u_1$$

Si el autovalor de módulo máximo no es único, existen modificaciones del método que permiten estimarlo. En particular, si λ_1 es un autovalor múltiple (y verifica que su módulo es estrictamente mayor que el del resto de autovalores), entonces el método de la potencia también estima λ_1.

El **método de la potencia inversa** permite calcular el autovalor de módulo mínimo. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ invertible y diagonalizable, con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > |\lambda_n| \; (> 0).$$

Entonces los autovalores de A^{-1} son $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ y verifican

$$|\lambda_1^{-1}| \leq |\lambda_2^{-1}| \leq \ldots < |\lambda_n^{-1}|.$$

Por tanto, podemos aproximar λ_n^{-1} mediante el método de la potencia, aplicado a la matriz A^{-1}

El **método de la potencia desplazada** permite mejorar la convergencia del método de la potencia y poder aplicarlo en el caso de autovalores distintos con el mismo módulo. Consideremos la matriz $A - \mu I$, donde μ se denomina desplazamiento. Si λ es un autovalor de A, entonces $\lambda - \mu$ es un autovalor de $A - \mu I$. De este modo, si dos autovalores tienen el mismo módulo, podemos tomar un desplazamiento para que en la matriz desplazada no tengan el mismo módulo y poder aplicar el método de la potencia.

Una variante del método anterior permite obtener el autovalor más próximo a un número complejo μ dado. Sean $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ los autovalores de $A - \mu I$ y supongamos que

$$|\bar{\lambda}_1| \geq |\bar{\lambda}_2| \geq \ldots > |\bar{\lambda}_n| > 0.$$

Entonces los autovalores de $(A - \mu I)^{-1}$ son $\bar{\lambda}_1^{-1}, \ldots, \bar{\lambda}_n^{-1}$ y verifican

$$|\bar{\lambda}_1^{-1}| \leq |\bar{\lambda}_2^{-1}| \leq \ldots < |\bar{\lambda}_n^{-1}|.$$

Por tanto, podemos aproximar $(\lambda_n - \mu)^{-1}$ mediante el método de la potencia, aplicado a la matriz $(A - \mu I)^{-1}$.

2.3.2 Métodos basados en transformaciones matriciales

Los métodos anteriores permiten estimar los autovalores de uno en uno. Existen métodos basados en transformaciones matriciales que permiten aproximar todos los autovalores a la vez. En este apartado estudiaremos uno de ellos.

2.3.2.1 Método QR de Francis-Kublanovskaya

El Método QR de Francis-Kublanovskaya es un método iterativo que, bajo ciertas condiciones permite obtener todos los autovalores de una matriz.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supondremos que podemos factorizarla como

$$A = QR,$$

donde Q es una matriz unitaria ($Q^*Q = I$) y R es una matriz triangular superior. Esta factorización se denomina **factorización QR**.

Sea $A_1 = A$ y Q_1, R_1 una factorización QR de A_1. Definimos la matriz

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^* A_1 Q_1 = Q_1^{-1} A_1 Q_1.$$

En particular A_1 y A_2 tienen los mismos autovalores. El método QR de Francis-Kublanovskaya consiste en ir calculando recursivamente

$$A_k = R_{k-1} Q_{k-1},$$

donde $Q_{k-1} R_{k-1} = A_{k-1}$, R_{k-1} es triangular superior y Q_{k-1} es unitaria.

Teorema 2.7 (Ver [1])

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que sus autovalores λ_i, $1 \leq i \leq n$ verifican

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|.$$

Entonces

$$\lim_{k \to \infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es más,

$$(A_k)_{i,i-1} = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right|^k\right), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Si además A es simétrica, entonces $c_{ij} = 0$, $1 \le i \ne j \le n$. ♡

2.3.2.2 Factorización QR Householder

Dado un vector v unitario (con norma euclídea) de $\mathbb{R}^n$, la **reflexión de Householder** es la matriz

$$P = I - 2vv^t.$$

Proposición 2.2

La reflexión de Householder es una matriz simétrica y ortogonal. Además

1. $PP = I_d$.
2. $\|Pc\|_2 = \|c\|_2$ *para todo* $c \in \mathbb{R}^n$.
3. *Geométricamente, se corresponde con una reflexión respecto al hiperplano ortogonal a v.* ♠

Demostración Es fácil comprobar que P es simétrica y ortogonal. En particular $PP = Id$, $\|P\|_2 = 1$ y la imagen por P de un vector c es otro vector con la misma norma (euclídea), ya que

$$\|Pc\|_2^2 = (Pc)^t Pc = c^t P^t Pc = c^t c = \|c\|_2^2.$$

Por otra parte, si $w = v(v^t c)$, w es la proyección de c en v. Entonces $c - w$ es un vector ortogonal a v, es decir, un vector del hiperplano ortogonal y

$$Pc = c - 2vv^t c = c - 2w$$

es el simétrico de c respecto a ese hiperplano. □

La reflexión de Householder permite transformar un vector en otro en la dirección de uno de los ejes.

Proposición 2.3

Dado $c \in \mathbb{R}^n$, existe una reflexión tal que $Pc = \pm\|c\|e_1$. ♠

Demostración Basta tomar

$$v = \frac{u}{\|u\|}, \quad u = c \pm \|c\|e_1.$$

Entonces

$$Pc = c - 2vv^t c = c - u\frac{2u^t c}{\|u\|^2}$$

Ahora bien, como

$$\frac{2u^t c}{\|u\|^2} = \frac{2\left(\|c\|^2 \pm \|c\|c_1\right)}{2\|c\|^2 \pm 2c_1\|c\|} = 1,$$

tenemos que

$$Pc = c - 2vv^t c = c - u\frac{2u^t c}{\|u\|^2} = c - (c \pm \|c\|e_1) = \mp\|c\|e_1$$

□

Algoritmo de factorización.

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y sean c la primera columna. Definimos la matriz

$$Q^{(1)} = I - 2vv^t, \quad v = \frac{u}{\|u\|}, \quad u = c \pm \|c\|e_1.$$

Entonces $Q^{(1)}$ es una matriz unitaria tal que la primera columna de $R^{(1)} = Q^{(1)}A$ tiene ceros debajo de la diagonal.

Definimos $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$ por recursivamente. Sea $\tilde{R}$ la submatriz de $R^{(k-1)}$ formada por las últimas $n-k+1$ filas y columnas. Procediendo como antes, existe una reflexión de Householder $\tilde{Q}$ tal que $\tilde{Q}\tilde{R}$ tiene ceros debajo de la diagonal. Entonces definimos

$$Q^{(k)} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}, \quad R^{(k)} = Q^{(k)}R^{(k-1)}.$$

Finalmente $Q = Q^{(1)}Q^{(2)} \dots Q^{(n-1)}$ y $R = Q^{(n-1)} \dots Q^{(2)}Q^{(1)}A$ producen la factorización QR buscada.

Ejemplo 2.4 Obtener una factorización QR de

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{14}{25} & -2 \\ -\frac{12}{25} & -\frac{52}{25} & -1 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -3 \end{pmatrix}.$$