# Resolución aproximada de ecuaciones no lineales

Los métodos numéricos para obtener un cero de f producen una sucesión  $\{x_n\}$  tal que

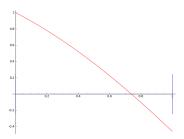
$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi, \quad \text{donde } f(\xi) = 0.$$

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión producida por un método decimos que converge a  $\xi$  con orden  $p \geq 1$  si existen C > 0 y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} \le C, \quad \text{para todo } n \ge n_0.$$

*Ejercicio 3.1* Obtener el orden de las siguientes sucesiones: 1/n,  $1/n^2$ ,  $2^{-n}$ ,  $x_{n+1} = x_n^2$  con  $x_0 < 1$ .

## 3.1 Métodos iterativos de dos puntos



#### Teorema 3.1 (Teorema de Bolzano)

Sea f una función continua en un intervalo [a,b] tal que f(a)f(b) < 0. Entonces, existe  $\xi \in (a,b)$  tal que  $f(\xi) = 0$ .

Los métodos de dos puntos tratan de reducir la anchura del intervalo manteniendo el cambio de signo.

#### 3.1.1 Método de la bisección

Sea  $f \in \mathcal{C}[a,b]$  tal que f(a)f(b) < 0. El método de la bisección consiste en definir dos sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ , determinadas por  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , y para n > 0

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} & \text{si } f(c_{n-1})f(a_{n-1}) \le 0, \\ c_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} & \text{si } f(c_{n-1})f(a_{n-1}) > 0, \\ c_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} & \text{si } f(c_{n-1})f(a_{n-1}) > 0\\ c_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Método de la bisección

### Teorema 3.2

Sean  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}([a,b])$  tal que f(a)f(b) < 0 y sean  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, de los intervalos obtenidos por el método de la bisección.

Entonces existe  $\xi \in (a,b)$  tal que  $f(\xi) = 0$  y

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \xi.$$

Además,

$$b_n - \xi \le \frac{b-a}{2^n}, \quad \xi - a_n \le \frac{b-a}{2^n}.$$

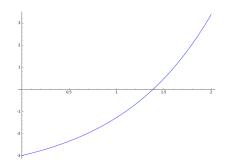
Sea  $f \in \mathcal{C}[a,b]$  tal que f(a)f(b) < 0. El método de la regula falsi se define análogamente al método de bisección tomando

$$c_{n-1} = \frac{f(b_{n-1})a_{n-1} - f(a_{n-1})b_{n-1}}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}.$$

En este método, no tenemos asegurado que la anchura de los intervalos converja a cero. Puede ocurrir que a partir de un término sólo se actualice  $a_n$  ó  $b_n$ . En todo caso, se puede demostrar que la sucesión  $c_n$  converge a un cero de f.

## 3.2 Métodos de un punto

Métodos de un punto



Tenemos una función f(x) continua y un punto inicial  $x_0$ .

Queremos calcular un cero de f(x) próximo a  $x_0$ .

Los métodos de un punto tratan de obtener el cero creando una sucesión  $\{x_n\}$  que converja a dicho valor.

#### 3.2.1 Método del punto fijo

El objetivo es obtener un **punto fijo** de una función F(x) dada, es decir, un valor c tal que F(c) = c.

A partir de la función F(x) y de un punto inicial  $x_0$ , definimos la sucesión del método del punto fijo como

$$x_n = F(x_{n-1})$$

Si el

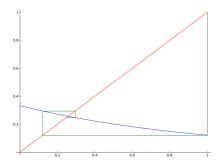
#### Proposición 3.1

Sea F continua,  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $\{x_n\}$  la sucesión definida por  $x_n = F(x_{n-1})$ . Si  $\{x_n\}$  converge a  $c \in \mathbb{R}$ , entonces F(c) = c.

**Demostración** Si  $x_n \to c$  cuando  $n \to \infty$ ,

$$c = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = F(c).$$

Ejemplo 3.1 Consideremos el método del punto fijo para  $F(x) = e^{-x}/3$  (gráfica azul), con  $x_0 = 1$ . Podemos representar las primeras iteraciones en una gráfica mediante un diagrama de Verhulst (o diagrama de tela de araña - cobweb diagram). La gráfica roja es la identidad, el punto buscado es aquel en el que se cortan.  $x_0 = 1$  Los valores que botenemos al aplicar el método son los siguientes:



- $x_1 = F(x_0) = 0.122626$
- $x_2 = F(x_1) = 0.294865$
- $x_3 = F(x_2) = 0.248211$

Podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach para asegurar la existencia y unicidad del punto fijo. En este contexto, el teorema tiene el siguiente enunciado.

#### Teorema 3.3

Supongamos que  $F \in C^1([a,b])$ .

- 1. Si  $F(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces F tiene un punto fijo en [a, b].
- 2. Si además F'(x) está definida y es continua en (a,b) y |F'(x)| < 1 para todo  $x \in (a,b)$ , entonces F tiene un único punto fijo c en [a,b].

**Demostración** El primer punto se sigue del Teorema de Bolzano aplicado a la función F(x) - x.

El segundo, del Teorema de Valor Medio, considerando que haya dos puntos fijos  $c_1 \neq c_2$  en a, b, entonces

$$|c_1 - c_2| = |F(c_1) - F(c_2)| = |F'(\xi)||c_1 - c_2| < |c_1 - c_2|.$$

De esta contradicción,  $c_1 = c_2$ .

#### Teorema 3.4

Supongamos que  $F \in C^1([a,b])$  verifica:

- 1.  $F(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ .
- 2. F'(x) está definida y es continua en (a,b) y  $|F'(x)| \le K < 1$  para todo  $x \in (a,b)$ .

Sea  $x_0 \in [a, b]$ , sea c el único punto fijo de F y sea  $\{x_n\}$  definida recursivamente por  $x_n = F(x_{n-1})$ . Entonces

$$\lim_{n \to \infty} x_n = c, \quad E_n := |c - x_n| \le K^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - K}.$$

Demostración

Tenemos que

$$|c - x_{n+1}| = |F(c) - F(x_n)| \le K|c - x_n|.$$

Por inducción,

$$|c - x_n| \le K^n |c - x_0|.$$

En consecuencia  $x_n \to c$  cuando  $n \to \infty$ . Además,

$$|c - x_0| \le |c - x_1| + |x_1 - x_0| \le K|c - x_0| + |x_1 - x_0|.$$

Luego

$$|c - x_0| \le |x_1 - x_0|/(1 - K)$$
.

## Ejercicio 3.2

Consideremos la función f(x) = ax, para  $a \in \mathbb{R}$ . Calcular para qué valores de a el método del punto fijo es convergente para cualquier condición inicial en el intervalo [-1,1] y qué valores de a no es convergente para toda condición inicial en [-1,1].

Pensar qué ocurre si  $a \in \mathbb{C}$ .

### 3.2.2 Extrapolación de Aitken

Supongamos que  $F \in \mathcal{C}([a,b])$  y que c un punto fijo de F. Si denotamos por  $\lambda = F'(c)$  y  $\{x_n\}$  la sucesión del método del punto fijo, entonces podemos estimar el error como:

$$c - x_n = F(c) - F(x_{n-1}) = F'(\xi)(c - x_{n-1}) \approx \lambda(c - x_{n-1}).$$

Despejando c, tenemos

$$c \approx \frac{x_n - \lambda x_{n-1}}{1 - \lambda} = x_n + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (x_n - x_{n-1}).$$

#### Proposición 3.2

Supongamos que  $x_n \to c$ ,  $n \to \infty$ . La sucesión

$$\lambda_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

converge a  $\lambda$  cuando  $n \to \infty$ .

Demostración Aplicando el Teorema de Valor Medio

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} = F'(\xi_n) \to F(c) = \lambda.$$

Una estimación del error, llamada Fórmula de extrapolación de Aitken es

$$c - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} (x_n - x_{n-1}).$$

Esta fórmula puede utilizarse para acelerar la convergencia.

#### 3.2.3 Método de Newton-Raphson

Partimos de una función f(x) y un punto inicial  $x_0$ .

Definimos  $x_1$  como el punto donde la tangente a la gráfica de f(x) en el punto  $(x_0, f(x_0))$  corta el eje x. La ecuación de la tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Despejando el punto de corte con el eje x,

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

Repitiendo el proceso,

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Convergencia

#### Teorema 3.5

Supongamos que f, f', f'' son continuas en un entorno de una raíz, c, de f y que  $f'(c) \neq 0$ .

Existe un entorno U de c tal que si  $x_0 \in U$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  del método de Newton-Raphson está contenida en U y

$$\lim_{n \to \infty} x_n = c.$$

Además,

$$E_{n+1} := c - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} E_n^2,$$

para cierto  $\xi_n$  entre  $x_n$  y c.



## Demostración

Desarrollando en serie de Taylor,

$$f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + f''(\xi)(c - x_n)^2 / 2.$$

Luego

$$c - x_{n+1} = c - x_n + f(x_n)/f'(x_n) = \frac{f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Definimos

$$c(\delta) = \frac{\max_{|x-c| \leq \delta} |f''(x)|}{2 \min_{|x-c| \leq \delta} |f'(x)|}.$$

Elegimos  $\delta$  tal que  $\rho=\delta c(\delta)<1$  (existe porque  $\delta c(\delta)\to 0$  cuando  $\delta\to 0$  ). Entonces, si  $e_0=|c-x_0|\le \delta$ ,

$$e_1 = |c - x_1| \le c(\delta)e_0^2 \le \delta c(\delta)e_0 = \rho e_0 < e_0 \le \delta.$$

Luego

$$e_2 \le \rho e_1 \le \rho^2 e_0,$$

Repitiendo el proceso

$$e_n \le \rho e_{n-1} \le \rho^n e_0.$$

Como  $\rho < 1$ ,  $e_n \to 0$  cuando  $n \to \infty$ .

## Proposición 3.3

Sea  $f \in C^2([a,b])$ , con una raíz c en [a,b].

Si f'(c) > 0 y f''(x) > 0 para todo  $x \in [c, b]$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  converge a c para todo valor inicial  $x_0 \in [c, b]$ .

Se verifica un resultado análogo si f'(c) < 0 y/o f''(x) < 0 para todo  $x \in [a, b]$ .

•

**Demostración** Se deja como ejercicio.

#### 3.2.4 Método de la secante

Partimos de una función f(x) y de dos puntos iniciales  $x_0, x_1$ . Calculamos el siguiente punto  $x_2$  como el punto en el que la secante determinada por los puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_1, f(x_1))$  corta el eje x.

La ecuación de la secante es:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Imponemos que corte el eje x:

$$x_2 = x_0 - f(x_0) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Repitiendo el proceso,

$$x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

#### Teorema 3.6

Sea c una solución de f(x) = 0 y supongamos que  $f'(r) \neq 0$ . Entonces el método de la secante converge en un entorno de c y es de orden  $(1 + \sqrt{5})/2$ .

**Demostración** Ver Kincaid-Cheney.

#### 3.2.5 Sistemas no lineales

Queremos resolver un sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

#### 3.2.5.1 *Punto fijo*

El método del punto fijo consiste en escribir el sistema no lineal en la forma F(x) = x, donde  $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  es una función continua. Fijado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , definimos la sucesión

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Por continuidad, si la sucesión  $\{x_n\}$  definida por el método del punto fijo converge, es decir, existe  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z,$$

entonces z es un punto fijo de F y por tanto una solución del sistema original.

Por el Teorema del punto fijo de Banach, una condición suficiente para que la sucesión converja es que la aplicación F sea contractiva.

#### Teorema 3.7

Supongamos que  $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(D)$ , existe  $z \in D$  tal que F(z) = z y  $\rho(JF(z)) < 1$ . Entonces existe un entorno U de z tal que para todo  $x_0 \in U$ , la sucesión definida por el método del punto fijo converge a z.

**Demostración** Existe una norma matricial inducida tal que ||JF(z)|| < 1. Tomemos una bola centrada en z tal que  $||JF(x)|| \le K < 1$  para todo x en la bola. Entonces

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 JF(x + t(y - x))(y - x)dt.$$

Luego

$$\|F(y)-F(x)\| \leq \int_0^1 \|JF(x+t(y-x))(y-x)\|dt \leq \int_0^1 \|JF(x+t(y-x))\|\|y-x\|dt < \|\leq K\|y-x\|$$
 De donde obtenemos que es contractiva.   

#### 3.2.5.2 Newton-Raphson

Consideremos de nuevo el sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Podemos escribir el sistema como  $\mathbf{f}(x)=0$ , para  $\mathbf{f}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_n)$ . Sean  $x,z\in\mathbb{R}^n$  tal que f(z)=0 y supongamos  $\mathbf{f}$  de clase 2. Entonces, desarrollando en serie de Taylor,

$$0 = f(z) \approx \mathbf{f}(x) + J \mathbf{f}(x)(z - x).$$

El método de Newton-Raphson consiste en, partiendo de  $x_0$ , generar la sucesión definida por

$$J \mathbf{f}(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\mathbf{f}(x_n).$$

#### Teorema 3.8

Supongamos que  $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ , existe  $z \in D$  tal que f(0) = 0.

Entonces existe un entorno U de z tal que para todo  $x_0 \in U$ , la sucesión definida por el método de Newton-Raphson converge a z.

Demostración El método de Newton-Raphson es equivalente a aplicar el método del punto fijo a la función

$$F(x) = x - (\operatorname{J} \mathbf{f}(x))^{-1} \mathbf{f}(x).$$

Es fácil ver que el radio espectral de JF(z) es cero, por lo que aplicando el Teorema del método del punto fijo concluímos.