Tema 3 Resolución aproximada de ecuaciones no lineales

Los métodos numéricos para obtener un cero de f producen una sucesión $\{x_n\}$ tal que

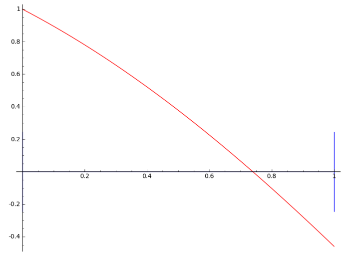
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \text{donde } f(\xi) = 0.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión producida por un método decimos que *converge a ξ con orden $p \geq 1$ si existen $C > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} \leq C, \quad \textit{para todo } n \geq n_0.$$

✍ **Ejercicio 3.1** *Obtener el orden de las siguientes sucesiones: $1/n$, $1/n^2$, 2^{-n}, $x_{n+1} = x_n^2$ con $x_0 < 1$.*

3.1 Métodos iterativos de dos puntos



Teorema 3.1 (Teorema de Bolzano)

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$. ♡

Los métodos de dos puntos tratan de reducir la anchura del intervalo manteniendo el cambio de signo.

3.1.1 Método de la bisección

Sea $f \in \mathcal{C}[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. El método de la bisección consiste en definir dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, determinadas por $a_0 = a$, $b_0 = b$, y para $n > 0$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} & \text{si } f(c_{n-1})f(a_{n-1}) \leq 0, \\ c_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} & \text{si } f(c_{n-1})f(a_{n-1}) > 0, \\ c_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Método de la bisección

Teorema 3.2

Sean $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, de los intervalos obtenidos por el método de la bisección.

Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

Además,

$$b_n - \xi \le \frac{b-a}{2^n}, \quad \xi - a_n \le \frac{b-a}{2^n}.$$

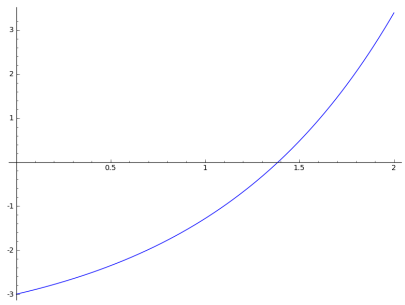
Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. El *método de la regula falsi se define análogamente al método de bisección tomando*

$$c_{n-1} = \frac{f(b_{n-1})a_{n-1} - f(a_{n-1})b_{n-1}}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}.$$

En este método, no tenemos asegurado que la anchura de los intervalos converja a cero. Puede ocurrir que a partir de un término sólo se actualice a_n ó b_n. En todo caso, se puede demostrar que la sucesión c_n converge a un cero de f.

3.2 Métodos de un punto

Métodos de un punto



Tenemos una función $f(x)$ **continua** *y un punto inicial x_0.*

Queremos calcular un cero de $f(x)$ próximo a x_0.

Los métodos de un punto tratan de obtener el cero creando una sucesión $\{x_n\}$ que converja a dicho valor.

3.2.1 Método del punto fijo

El objetivo es obtener un **punto fijo** *de una función $F(x)$ dada, es decir, un valor c tal que $F(c) = c$.*

A partir de la función $F(x)$ y de un punto inicial x_0, definimos la sucesión del método del punto fijo como

$$\boxed{x_n = F(x_{n-1})}.$$

Si el

Proposición 3.1

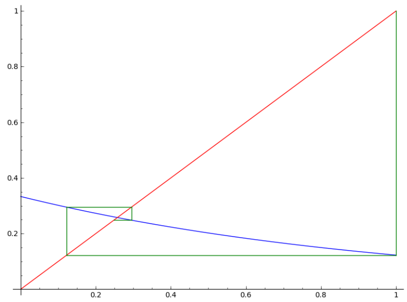
Sea F continua, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}$ la sucesión definida por $x_n = F(x_{n-1})$. Si $\{x_n\}$ converge a $c \in \mathbb{R}$, entonces $F(c) = c$.

Demostración Si $x_n \to c$ cuando $n \to \infty$,

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = F(c).$$

$\square$

Ejemplo 3.1 *Consideremos el método del punto fijo para $F(x) = e^{-x}/3$ (gráfica azul), con $x_0 = 1$. Podemos representar las primeras iteraciones en una gráfica mediante un diagrama de Verhulst (o diagrama de tela de araña - cobweb diagram). La gráfica roja es la identidad, el punto buscado es aquel en el que se cortan. $x_0 = 1$ Los valores que botenemos al aplicar el método son los siguientes:*



- $x_1 = F(x_0) = 0{,}122626$
- $x_2 = F(x_1) = 0{,}294865$
- $x_3 = F(x_2) = 0{,}248211$

Podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach para asegurar la existencia y unicidad del punto fijo. En este contexto, el teorema tiene el siguiente enunciado.

Teorema 3.3

Supongamos que $F \in \mathcal{C}^1([a,b])$.

1. *Si $F(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, entonces F tiene un punto fijo en $[a,b]$.*
2. *Si además $F'(x)$ está definida y es continua en (a,b) y $|F'(x)| < 1$ para todo $x \in (a,b)$, entonces F tiene un único punto fijo c en $[a,b]$.*

♡

Demostración El primer punto se sigue del Teorema de Bolzano aplicado a la función $F(x) - x$.

El segundo, del Teorema de Valor Medio, considerando que haya dos puntos fijos $c_1 \neq c_2$ en a, b, entonces

$$|c_1 - c_2| = |F(c_1) - F(c_2)| = |F'(\xi)||c_1 - c_2| < |c_1 - c_2|.$$

De esta contradicción, $c_1 = c_2$. $\square$

Teorema 3.4

Supongamos que $F \in \mathcal{C}^1([a,b])$ verifica:

1. *$F(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$.*
2. *$F'(x)$ está definida y es continua en (a,b) y $|F'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in (a,b)$.*

Sea $x_0 \in [a,b]$, sea c el único punto fijo de F y sea $\{x_n\}$ definida recursivamente por $x_n = F(x_{n-1})$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c, \quad E_n := |c - x_n| \leq K^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-K}.$$

♡

Demostración

Tenemos que

$$|c - x_{n+1}| = |F(c) - F(x_n)| \leq K|c - x_n|.$$

Por inducción,

$$|c - x_n| \leq K^n |c - x_0|.$$

En consecuencia $x_n \to c$ cuando $n \to \infty$. Además,

$$|c - x_0| \leq |c - x_1| + |x_1 - x_0| \leq K|c - x_0| + |x_1 - x_0|.$$

Luego

$$|c - x_0| \leq |x_1 - x_0|/(1 - K).$$

□

✍ ***Ejercicio 3.2***

Consideremos la función $f(x) = ax$, para $a \in \mathbb{R}$. Calcular para qué valores de a el método del punto fijo es convergente para cualquier condición inicial en el intervalo $[-1, 1]$ y qué valores de a no es convergente para toda condición inicial en $[-1, 1]$.

Pensar qué ocurre si $a \in \mathbb{C}$.

3.2.2 Extrapolación de Aitken

Supongamos que $F \in \mathcal{C}([a, b])$ y que c un punto fijo de F. Si denotamos por $\lambda = F'(c)$ y $\{x_n\}$ la sucesión del método del punto fijo, entonces podemos estimar el error como:

$$c - x_n = F(c) - F(x_{n-1}) = F'(\xi)(c - x_{n-1}) \approx \lambda(c - x_{n-1}).$$

Despejando c, tenemos

$$c \approx \frac{x_n - \lambda x_{n-1}}{1 - \lambda} = x_n + \frac{\lambda}{1 - \lambda}(x_n - x_{n-1}).$$

Proposición 3.2

Supongamos que $x_n \to c$, $n \to \infty$. La sucesión

$$\lambda_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

converge a λ cuando $n \to \infty$. ♠

Demostración Aplicando el Teorema de Valor Medio

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} = F'(\xi_n) \to F(c) = \lambda.$$

□

Una estimación del error, llamada **Fórmula de extrapolación de Aitken** *es*

$$c - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}(x_n - x_{n-1}).$$

Esta fórmula puede utilizarse para acelerar la convergencia.

3.2.3 Método de Newton-Raphson

Partimos de una función $f(x)$ y un punto inicial x_0.

Definimos x_1 como el punto donde la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ corta el eje x.

La ecuación de la tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Despejando el punto de corte con el eje x,

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

Repitiendo el proceso,

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)}$$

Convergencia

Teorema 3.5

Supongamos que f, f', f'' son continuas en un entorno de una raíz, c, de f y que $f'(c) \neq 0$.

Existe un entorno U de c tal que si $x_0 \in U$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ del método de Newton-Raphson está contenida en U y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Además,

$$E_{n+1} := c - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}E_n^2,$$

para cierto ξ_n entre x_n y c. ♡

Demostración

Desarrollando en serie de Taylor,

$$f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + f''(\xi)(c - x_n)^2/2.$$

Luego

$$c - x_{n+1} = c - x_n + f(x_n)/f'(x_n) = \frac{f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Definimos

$$c(\delta) = \frac{\max_{|x-c|\leq\delta} |f''(x)|}{2 \min_{|x-c|\leq\delta} |f'(x)|}.$$

Elegimos δ tal que $\rho = \delta c(\delta) < 1$ (existe porque $\delta c(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$). Entonces, si $e_0 = |c - x_0| \leq \delta$,

$$e_1 = |c - x_1| \leq c(\delta)e_0^2 \leq \delta c(\delta)e_0 = \rho e_0 < e_0 \leq \delta.$$

Luego

$$e_2 \leq \rho e_1 \leq \rho^2 e_0,$$

Repitiendo el proceso

$$e_n \leq \rho e_{n-1} \leq \rho^n e_0.$$

Como $\rho < 1$, $e_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

□

Proposición 3.3

Sea $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, con una raíz c en $[a, b]$.

Si $f'(c) > 0$ y $f''(x) > 0$ para todo $x \in [c, b]$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a c para todo valor inicial $x_0 \in [c, b]$.

Se verifica un resultado análogo si $f'(c) < 0$ y/o $f''(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración Se deja como ejercicio. □

3.2.4 Método de la secante

Partimos de una función $f(x)$ y de dos puntos iniciales x_0, x_1. Calculamos el siguiente punto x_2 como el punto en el que la secante determinada por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ corta el eje x.

La ecuación de la secante es:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Imponemos que corte el eje x:

$$x_2 = x_0 - f(x_0)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Repitiendo el proceso,

$$\boxed{x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}}$$

Teorema 3.6

Sea c una solución de $f(x) = 0$ y supongamos que $f'(r) \neq 0$. Entonces el método de la secante converge en un entorno de c y es de orden $(1 + \sqrt{5})/2$.

Demostración Ver Kincaid-Cheney. □

3.2.5 Sistemas no lineales

Queremos resolver un sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

3.2.5.1 Punto fijo

El método del punto fijo consiste en escribir el sistema no lineal en la forma $F(x) = x$, donde $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua. Fijado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos la sucesión

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Por continuidad, si la sucesión $\{x_n\}$ definida por el método del punto fijo converge, es decir, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z,$$

entonces z es un punto fijo de F y por tanto una solución del sistema original.

Por el Teorema del punto fijo de Banach, una condición suficiente para que la sucesión converja es que la aplicación F sea contractiva.

Teorema 3.7

Supongamos que $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$, existe $z \in D$ tal que $F(z) = z$ y $\rho(JF(z)) < 1$. Entonces existe un entorno U de z tal que para todo $x_0 \in U$, la sucesión definida por el método del punto fijo converge a z.

♡

Demostración Existe una norma matricial inducida tal que $\|JF(z)\| < 1$. Tomemos una bola centrada en z tal que $\|JF(x)\| \leq K < 1$ para todo x en la bola. Entonces

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 JF(x + t(y-x))(y-x)dt.$$

Luego

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \int_0^1 \|JF(x+t(y-x))(y-x)\|dt \leq \int_0^1 \|JF(x+t(y-x))\|\|y-x\|dt < \| \leq K\|y-x\|$$

De donde obtenemos que es contractiva. □

3.2.5.2 Newton-Raphson

Consideremos de nuevo el sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) = 0. \end{cases}$$

Podemos escribir el sistema como $\mathbf{f}(x) = 0$, para $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_n)$. Sean $x, z \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(z) = 0$ y supongamos $\mathbf{f}$ de clase 2. Entonces, desarrollando en serie de Taylor,

$$0 = f(z) \approx \mathbf{f}(x) + \mathrm{J}\,\mathbf{f}(x)(z-x).$$

El método de Newton-Raphson consiste en, partiendo de x_0, generar la sucesión definida por

$$\mathrm{J}\,\mathbf{f}(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\mathbf{f}(x_n).$$

Teorema 3.8

Supongamos que $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$, existe $z \in D$ tal que $f(0) = 0$. Entonces existe un entorno U de z tal que para todo $x_0 \in U$, la sucesión definida por el método de Newton-Raphson converge a z.

♡

Demostración El método de Newton-Raphson es equivalente a aplicar el método del punto fijo a la función

$$F(x) = x - (\mathrm{J}\,\mathbf{f}(x))^{-1}\mathbf{f}(x).$$

Es fácil ver que el radio espectral de $JF(z)$ es cero, por lo que aplicando el Teorema del método del punto fijo concluímos. □