Resolución aproximada de ecuaciones no lineales

José Luis Bravo

Índice

Orden de un método

Los métodos numéricos para obtener un cero de f producen una sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \text{donde } f(\xi) = 0.$$

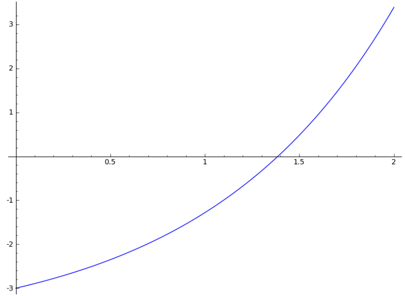
Sea $\{x_n\}$ una sucesión producida por un método decimos que **converge a ξ con orden $p \geq 1$** si existen $C > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} \leq C, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Ejemplo

Obtener el orden de las siguientes sucesiones: $1/n$, $1/n^2$, 2^{-n}, $x_{n+1} = x_n^2$ *con* $x_0 < 1$.

Métodos de un punto



Tenemos una función $f(x)$ **continua** y un punto inicial x_0.

Queremos calcular un cero de $f(x)$ próximo a x_0.

Los métodos de un punto tratan de obtener el cero creando una sucesión $\{x_n\}$ que converja a dicho valor.

Método del punto fijo

El objetivo es obtener un **punto fijo** de una función $F(x)$ dada, es decir, un valor c tal que $F(c) = c$.

Partimos de una función $F(x)$ y de un punto inicial x_0.

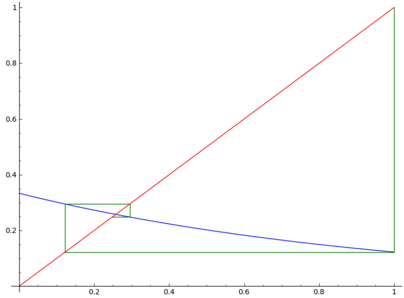
Calculamos los puntos recursivamente

$$\boxed{x_n = F(x_{n-1})}$$

Proposición

Sea F continua, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}$ la sucesión definida por $x_n = F(x_{n-1})$. Si $\{x_n\}$ converge a $c \in \mathbb{R}$, entonces $F(c) = c$.

Método del punto fijo



$F(x) = e^{-x}/3$ (gráfica azul).

La gráfica roja es la identidad, el punto buscado es aquel en el que se cortan. $x_0 = 1$

- $x_1 = F(x_0) = 0.122626$
- $x_2 = F(x_1) = 0.294865$
- $x_3 = F(x_2) = 0.248211$

Los segmentos verdes unen los puntos de la sucesión calculada: $(x_0, F(x_0))$ y $(F(x_0), F(x_0))$

Convergencia y error

Teorema

Supongamos que $F \in \mathcal{C}^1([a,b])$.

1. *Si* $F(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces* F *tiene un punto fijo en* $[a,b]$.
2. *Si además* $F'(x)$ *está definida y es continua en* (a,b) *y* $|F'(x)| < 1$ *para todo* $x \in (a,b)$, *entonces* F *tiene un único punto fijo* c *en* $[a,b]$.

Convergencia y error

Teorema

Supongamos que $F \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *verifica:*

1. $F(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$.
2. $F'(x)$ *está definida y es continua en* (a,b) *y* $|F'(x)| \leq K < 1$ *para todo* $x \in (a,b)$.

Sea $x_0 \in [a,b]$, *sea* c *el único punto fijo de* F *y sea* $\{x_n\}$ *definida recursivamente por* $x_n = F(x_{n-1})$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c, \quad E_n := |c - x_n| \leq K^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-K}.$$

Convergencia y error

Ejemplo:

Consideremos la función $f(x) = ax$, para $a \in \mathbb{R}$.

Calcular para qué valores de a el método del punto fijo es convergente para cualquier condición inicial en el intervalo $[-1, 1]$ y qué valores de a no es convergente para toda condición inicial en $[-1, 1]$.

Como ejercicio, pensar qué ocurre si $a \in \mathbb{C}$.

Estimación del error de Aitken

Sea F una función y c un punto fijo. Si denotamos por $\lambda = F'(c)$ y $\{x_n\}$ la sucesión del método del punto fijo, entonces podemos estimar el error como:

$$c - x_n \approx \lambda(c - x_{n-1})$$

Despejando c, tenemos

$$c \approx x_n + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x_n - x_{n-1}).$$

Estimación del error de Aitken

Proposición

Supongamos que $x_n \to c$, $n \to \infty$. La sucesión

$$\lambda_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

converge a λ cuando $n \to \infty$.

Una estimación del error, llamada **Fórmula de extrapolación de Aitken** es

$$c - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}(x_n - x_{n-1}).$$

Esta fórmula puede utilizarse para acelerar la convergencia.

Método de Newton-Raphson

Partimos de una función $f(x)$ y un punto inicial x_0.

Definimos x_1 como el punto donde la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ corta el eje x.

La ecuación de la tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Despejando el punto de corte con el eje x,

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

Repitiendo el proceso,

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)}$$

Convergencia

Teorema

Supongamos que f, f', f'' son continuas en un entorno de una raíz, c, de f y que $f'(c) \neq 0$.

Existe un entorno U de c tal que si $x_0 \in U$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ del método de Newton-Raphson está contenida en U y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Además,

$$E_{n+1} := c - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} E_n^2,$$

para cierto ξ_n entre x_n y c.

Convergencia

Proposición

Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$*, con una raíz* c *en* $[a,b]$.

Si $f'(c) > 0$ *y* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in [c,b]$*, entonces la sucesión* $\{x_n\}$ *converge a* c *para todo valor inicial* $x_0 \in [c,b]$.

Método de la secante

Partimos de una función $f(x)$ y de dos puntos iniciales x_0, x_1.
Calculamos el siguiente punto x_2 como el punto en el que la secante determinada por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ corta el eje x.
La ecuación de la secante es:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Imponemos que corte el eje x:

$$x_2 = x_0 - f(x_0)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Repitiendo el proceso,

$$\boxed{x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}}$$

Método del punto fijo

Queremos resolver un sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

El *método del punto fijo* consiste en escribir el sistema no lineal en la forma

$$F(x) = x,$$

donde $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua. Fijado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos la sucesión

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Método del punto fijo

Por continuidad, si la sucesión $\{x_n\}$ definida por el método del punto fijo converge, es decir, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z,$$

entonces z es un punto fijo de F y por tanto una solución del sistema original.

Por el Teorema del punto fijo, una condición suficiente para que la sucesión converja es que la aplicación F sea contractiva.

Proposición

Supongamos que $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$, *existe* $z \in D$ *tal que* $F(z) = z$ *y* $\rho(JF(z)) < 1$.
Entonces existe un entorno U *de* z *tal que para todo* $x_0 \in U$, *la sucesión definida por el método del punto fijo converge a* z.

Método de Newton-Raphson

Consideremos de nuevo el sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n)=0, \\ \ldots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n)=0. \end{cases}$$

Podemos escribir el sistema como $\mathbf{f}(x)=0$, para $\mathbf{f}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_n)$. Sean $x,z\in\mathbb{R}^n$ tal que $f(z)=0$ y supongamos $\mathbf{f}$ de clase 2. Entonces, desarrollando en serie de Taylor,

$$0=f(z)\approx\mathbf{f}(x)+\mathrm{J}\,\mathbf{f}(x)(z-x).$$

El *método de Newton-Raphson* consiste en, partiendo de x_0, generar la sucesión definida por

$$\mathrm{J}\,\mathbf{f}(x_n)(x_{n+1}-x_n)=-\mathbf{f}(x_n).$$