Interpolación y aproximación

José Luis Bravo

Índice

Planteamiento del problema

La **interpolación** consiste en obtener una función que pase por una serie de puntos prefijados.

- **Interpolación polinomial.** Elegimos los polinomios de grado menor o igual que el número de puntos menos 1.
- **Interpolación a trozos.** Elegimos funciones definidas a trozos por polinomios.
- **Otras interpolaciones.** Aunque no lo estudiaremos en este tema, también existe la interpolación por funciones racionales (aproximantes de Padé), por funciones trigonométricas, etc.

Definición formal

Denotaremos $\mathcal{P}_n$ el conjunto de polinomios (reales) de grado menor o igual que n.

Teorema

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, existe un único polinomio en $\mathcal{P}_n$, $P_n(x)$, tal que

$$P_n(x_k) = y_k, \ \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

El único polinomio de grado menor o igual que n, $P_n(x)$ que verifica

$$P_n(x_k) = y_k, \ \ k = 0, 1, \ldots, n$$

se denomina **polinomio interpolador de los puntos**.

Polinomio Interpolador de una función

Supongamos que (x_k, y_k), pertenecen a la gráfica de una función f, es decir, $y_k = f(x_k)$, entonces el siguiente resultado determina el error al sustituir la función por su polinomio interpolador.

Teorema

Sean $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y supongamos (sin pérdida de generalidad), que x_0 es el mínimo y x_n el máximo.

Dada $f \in \mathcal{C}^{n+1}([x_0, x_n])$, si $P(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, entonces para todo $x \in [x_0, x_n]$, existe $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Polinomios de Lagrange

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se definen los **polinomios (base) de Lagrange** como

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$L_i(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_i, 1)$ y $(x_j, 0)$, para $j \neq i$.

Proposición

El polinomio interpolador de (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) *es*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Método de Newton

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se definen los **polinomios (base) de Newton** como

$$1, \quad x - x_0, \quad (x-x_0)(x-x_1), \quad \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

La matriz de la aplicación lineal $\phi \colon \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida como

$$\phi(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n)),$$

es triangular inferior (con diagonal no nula).

Diferencias divididas

Dada una función $f(x)$ y $n+1$ valores $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se definen las **diferencias divididas** de $f(x)$ recursivamente como

$$f[x_k] = f(x_k),$$

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}},$$

$$f[x_{k-r}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-r+1}, \ldots, x_k] - f[x_{k-r}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-r}}.$$

Método de Newton

Teorema

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y sea f una función definida (al menos) sobre esos puntos. Entonces el polinomio interpolador de los puntos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ es

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i).$$

Corolario

La diferencia dividida $f[x_0, \ldots, x_n]$ es invariante frente a permutaciones de $x_0, \ldots, x_n$, es decir, si $\sigma \in S_{n+1}$, entonces

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Método de Newton

Teorema

Sean P_n el polinomio interpolador de una función f en $n+1$ puntos distintos, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Para todo $\bar{x} \neq x_0, \ldots, x_n$,

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] \prod_{i=0}^{n} (\bar{x} - x_i).$$

Corolario

Si $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ y $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Interpolación de Hermite

Teorema

Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, *y*

$$y_i^{(j)}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m_i.$$

Existe un único polinomio de grado menor o igual que $m := n + \sum_{i=0}^{n} m_i$ *tal que*

$$P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m_i.$$

El polinomio definido por el Teorema anterior se denomina **polinomio interpolador de Hermite**.

Definimos las diferencias divididas como

$$f[x_k, x_k] = f'(x_k),$$

$$f[x_k, x_k, x_k] = \frac{f''(x_k)}{2},$$

$$\ldots,$$

$$f[x_k, \overset{m}{\ldots}, x_k] = \frac{f^{m-1)}(x_k)}{(m-1)!}.$$

Denotemos

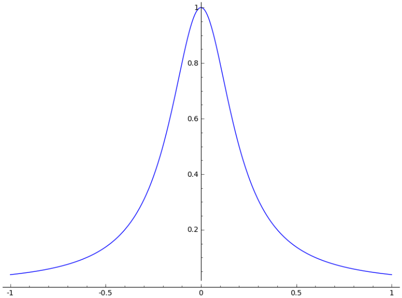
$$\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{m} = \{x_0, \overset{m_0+1}{\ldots}, x_0, x_1, \overset{m_1+1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_n, \overset{m_n+1}{\ldots}, x_n\}$$

Entonces el polinomio interpolador de Hermite es

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m} f[\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - \tilde{x}_i).$$

Fenómeno de Runge

El ajuste de una curva mediante polinomios de interpolación de grado alto, esto es, para un conjunto numeroso de datos, suele resultar poco satisfactoria, pues produce oscilaciones en los extremos.

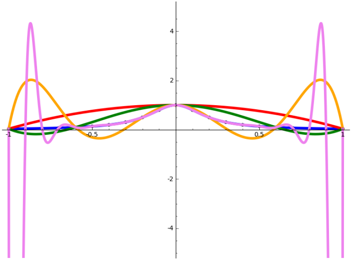


Fenómeno de Runge

Runge observó que si interpolamos la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

en puntos equiespaciados, la distancia entre la función y el polinomio de interpolación, con la norma infinito, tiende a infinito cuando aumentamos el número de puntos.



Interpolación polinomial a trozos: splines

La interpolación polinomial a trozos consiste en construir un polinomio de grado 1, 2 o 3 para cada par de nodos consecutivos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) La curva definida mediante estos "trozos" se denomina **spline**. Estudiaremos:

1. Interpolación lineal a trozos: splines lineales
2. Interpolación cúbica a trozos: splines de Hermite
3. Interpolación cúbica a trozos: splines cúbicos

Splines lineales

Consisten simplemente en unir los nodos o puntos mediante segmentos. Así, dado el par de nodos $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$, definimos el segmento que los une:

$$S_k(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), \;\; x \in [x_k, x_{k+1}]$$

con lo que el spline lineal de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ es la función definida a trozos:

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_k, x_{k+1}], \;\; k = 0, \ldots, n-1$$

Interpolación cúbica a trozos de Hermite

Nos dan

- $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$,
- $y_0, y_1, \ldots, y_n$,
- $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$.

Queremos una función f tal que

$$f(x_k) = y_k, \quad f'(x_k) = y'_k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Vamos a obtener una función de la forma

$$f(x) = \left\{ a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k, \quad x \in (x_{k-1}, x_k). \right.$$

Es decir, en cada intervalo (x_{k-1}, x_k) tomamos el polinomio cúbico de Hermite.

Splines cúbicos

En el caso de que busquemos una curva más suave, se impone que el spline, además de pasar por los nodos, posea primera y segunda derivadas continuas. Se define la curva en $[x_0, x_n]$ a trozos

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_k, x_{k+1}], \; k = 0, \dots, n-1$$

donde $S_k(x)$ es un polinomio cúbico y se impone

1. S interpole: $S_k(x_k) = y_k$, $S_k(x_{k+1}) = y_k$, $k = 0, \dots, n-1$
2. S en $\mathcal{C}^1([x_0, x_n])$: $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0, \dots, n-2$
3. S en $\mathcal{C}^2([x_0, x_n])$: $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0, \dots, n-2$

Splines cúbicos

Para encontrar una solución del sistema, formado por $4n-2$ ecuaciones y $4n$ incógnitas, debemos imponer dos restricciones más. Según la forma de imponerlas, podemos definir distintos tipos de splines.

1. Spline cúbico natural: este spline cúbico es el que minimiza la energía de tensión.
$$S''(x_0)=0, \quad S''(x_n)=0.$$
2. Spline periódico:
$$S'(x_0)=S'(x_n), \quad S''(x_0)=S''(x_n)$$
3. Spline cúbico sujeto (el que menos oscila)
$$S'(x_0)=d_0, \quad S'(x_n)=d_n$$

Momentos de un spline

Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Supongamos que tenemos valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ y sea S el spline cúbico natural tal que $S(x_i) = y_i$.

En esta sección veremos un método efectivo para calcularlo. Además, probaremos la existencia y unicidad de dicho spline.

Como vamos a imponer que $S \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$, podemos definir los **momentos** de S en $x_0, \ldots, x_n$ como

$$z_i := S''(x_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Método de los momentos

Denotemos

$$h_i := x_{i+1} - x_i, \quad b_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i},$$

$$u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad v_i = 6(b_i - b_{i-1}).$$

Proposición

Los momentos z_i son las soluciones del siguiente sistema tridiagonal

$$\begin{cases} z_0 & = 0, \\ h_{i-1}z_{i-1} + u_i z_i + h_i z_{i+1} & = v_i, \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ z_n & = 0. \end{cases}$$

Método de los momentos

Teorema

Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Supongamos que tenemos valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$. El spline cúbico natural S que verifica $S(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, está formado por los polinomios

$$\begin{aligned} S_i(x) = & \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 \\ & + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1} \right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i \right)(x_{i+1} - x). \end{aligned}$$

para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i < n$.

El **problema de aproximación** consiste en, dada una función continua f y una familia de funciones $\mathcal{F}$, obtener $g \in \mathcal{F}$ tal que la distancia entre f y g sea mínima.

Por tanto, necesitaremos fijar dos elementos:

1. La definición de distancia entre dos funciones.
2. La famila de funciones $\mathcal{F}$.

Espacios prehilbertianos

Un **espacio prehilbertiano** $\mathcal{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, dotado de un producto escalar, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A partir del producto escalar, definimos una norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Ejemplos

1. $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar
$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$
2. $\mathcal{C}_w[a, b]$ el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ con el producto escalar
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x)\, dx,$$
donde w es una función continua y positiva en $[a, b]$.

Espacios prehilbertianos

Dadas $f, g \in \mathcal{C}$, decimos que f y g son ortogonales, $f \perp g$, si $\langle f, g \rangle = 0$.

Lema

Sea $\mathcal{C}$ un espacio prehilbertiano, se verifica

1. $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\langle f, g \rangle$.
2. $f \perp g$ *si y sólo si* $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.
3. $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$.
4. $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$.

Teoría de la aproximación

Sea $\mathcal{C}$ un espacio prehilbertiano y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{C}$. Dada $f \in \mathcal{C}$, decimos que $g \in \mathcal{S}$ es la **mejor aproximación de f en $\mathcal{S}$** si

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| \quad \text{para todo } h \in \mathcal{S}.$$

Decimos que $h \in \mathcal{C}$ es **ortogonal** a $\mathcal{S}$, $h \perp \mathcal{S}$, si $\langle h, g \rangle = 0$ para todo $g \in \mathcal{S}$.

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ un espacio prehilbertiano y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{C}$.
Dada $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{S}$ es la mejor aproximación de f en $\mathcal{S}$ si y sólo si $f - g \perp \mathcal{S}$.

Sistemas ortonormales

Dado un espacio prehilbertiano, decimos que un conjunto finito de vectores o una sucesión de vectores $f_1, f_2, \ldots$ es **ortogonal** si

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Decimos que es **ortonormal** si

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Teorema

Sea $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un conjunto ortonormal de vectores de $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{S}$ el subespacio generado por $\{g_1, \ldots, g_n\}$ y $f \in \mathcal{C}$. Entonces $g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ es la mejor aproximación de f en $\mathcal{S}$ si y sólo si

$$c_i = \langle f, g_i \rangle, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aproximación cuadrática polinomial

Fijado un intervalo I y una función w, continua y positiva en el interior de I. Denotaremos $\mathcal{C}_w(I)$ al espacio prehilbertiano de las funciones continuas sobre I dotado del producto escalar

$$\langle f|g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,dx, \quad f,g \in \mathcal{C}_w(I).$$

Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Dada $f \in \mathcal{C}_w(I)$, buscamos la mejor aproximación de f en $\mathcal{P}_n$.

Aproximación cuadrática polinomial

Como hemos visto antes, necesitaremos una base ortogonal de $\mathcal{P}_n$. Para ello podemos aplicar la ortogonalización de Gram-Schmidt a $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Teorema

Consideremos los polinomios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - a_1$ *y*

$$p_i(x) = (x - a_i)p_{i-1}(x) - b_i p_{i-2}(x), \quad i = 2, \dots, n,$$

donde

$$a_i = \frac{\langle xp_{i-1}, p_{i-1}\rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1}\rangle}, \quad b_i = \frac{\langle xp_{i-1}, p_{i-2}\rangle}{\langle p_{i-2}, p_{i-2}\rangle}.$$

Entonces $p_0, \dots, p_n$, *es una base ortogonal de* $\mathcal{P}_n$.

Aproximación cuadrática polinomial

1. Si tomamos como producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Los polinomios de la base ortogonal dada por el Teorema anterior se denominan **polinomios de Legendre**.

2. Los polinomios de Chebyshev forman una base ortogonal de $\mathcal{P}_n$ con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$