Tema 4 Interpolación y aproximación polinomial

La **interpolación** *consiste en obtener una función que pase por una serie de puntos prefijados.*

- **Interpolación polinomial.** *Elegimos los polinomios de grado menor o igual que el número de puntos menos 1.*
- **Interpolación a trozos.** *Elegimos funciones definidas a trozos por polinomios.*
- **Otras interpolaciones.** *Aunque no lo estudiaremos en este tema, también existe la interpolación por funciones racionales (aproximantes de Padé), por funciones trigonométricas, etc.*

4.1 Polinomio interpolador

Denotaremos $\mathcal{P}_n$ el conjunto de polinomios (reales) de grado menor o igual que n.

Teorema 4.1

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, existe un único polinomio en $\mathcal{P}_n$, $P_n(x)$, tal que

$$P_n(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

♡

Demostración $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial de dimensión $n+1$.

Consideremos la aplicación lineal $\phi\colon P_n \to R^n$ tal que $\phi(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n))$.

Bastaría ver es un automorfismo, ya que dados $(y_0, \ldots, y_n)$ el polinomio interpolador es la preimagen por ϕ.

Si tomamos la base $1, x, x^2$, ..., entonces su matriz es la matriz de Vandermonde y el determinante es no nulo.

Una demostración alternativa es probar que el núcleo es cero, lo que es trivial, ya que el núcleo es un polinomio de grado menor o igual que n con las $n+1$ raíces $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

□

El único polinomio de grado menor o igual que n, $P_n(x)$ que verifica

$$P_n(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$$

se denomina **polinomio interpolador de los puntos**.

Ejemplo 4.1 *Consideremos los puntos:*

$$(0, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 4)$$

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos y obtenemos

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 4 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}x^2 + x^3.$$

Corolario 4.1

Consideremos el espacio vectorial generado por funciones $\{f_0(x), \ldots, f_n(x)\}$. Entonces existe una única función de dicho espacio que interpola $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si

$$\begin{vmatrix} f_0(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

♡

Si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x)$, es la función de interpolación del corolario anterior, entonces $(a_0, \ldots, a_n)$ son solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} f_0(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Supongamos que (x_k, y_k), pertenecen a la gráfica de una función f, es decir, $y_k = f(x_k)$, entonces el siguiente resultado determina el error al sustituir la función por su polinomio interpolador.

Teorema 4.2

Sean $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y supongamos (sin pérdida de generalidad), que x_0 es el mínimo y x_n el máximo.

Dada $f \in \mathcal{C}^{n+1}([x_0, x_n])$, si $P(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, entonces para todo $x \in [x_0, x_n]$, existe $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

♡

Demostración Consideramos $\bar{x} \neq x_i$ fijo, la función $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ y el valor $c = (f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}))/\omega(\bar{x})$.

Entonces la función $\phi(x) = f(x) - P_n(x) - c\omega(x)$ tiene $n+1$ ceros, luego (Teorema de Rolle) su derivada n+1 tiene un cero, ξ, pero la derivada $n+1$ de P_n es 0 y la de ω es $(n+1)!$, luego

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!$$

Despejando

$$f(\bar{x}) - P_x(\bar{x}) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(\bar{x}).$$

□

4.1.1 Polinomios de Lagrange

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se definen los **polinomios (base) de Lagrange** *como*

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$L_i(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_i, 1)$ y $(x_j, 0)$, para $j \neq i$.

Proposición 4.1

El polinomio interpolador de (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) *es*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

4.1.2 Método de Newton

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ *si* $i \neq j$, *se definen los* **polinomios (base) de Newton** *como*

$$1, \quad x - x_0, \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

La matriz de la aplicación lineal $\phi\colon \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *definida como*

$$\phi(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n)),$$

es triangular inferior (con diagonal no nula).

Dada una función $f(x)$ *y* $n+1$ *valores* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *tales que* $x_i \neq x_j$ *si* $i \neq j$, *se definen las* **diferencias divididas** *de* $f(x)$ *recursivamente como*

$$f[x_k] = f(x_k),$$
$$f[x_r, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{r+1}, \ldots, x_k] - f[x_r, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_r}, \quad 0 \leq r < k \leq n.$$

Teorema 4.3

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *tales que* $x_i \neq x_j$ *si* $i \neq j$ *y sea* f *una función definida (al menos) sobre esos puntos. Entonces el polinomio interpolador de los puntos* $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ *es*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i).$$

Demostración Por inducción sobre el número de puntos.

Si $n = 1$, es trivial.

Veamos que se es cierto para n puntos entonces lo es para $n+1$ Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$P_{n-1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Buscaremos a_n para que

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

(Nótese que basta resolver la ecuación $P_n(x_n) = P_{n-1}(x_n) + a_n(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1})$.)

Sean p, q los polinomios interpoladores de $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, respectivamente. Entonces

$$P_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(q(x) - p(x)).$$

Pero, igualando los coeficientes de x^n, tenemos

$$a_n = \frac{1}{x_n - x_0}(f[x_1, x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

□

Corolario 4.2

La diferencia dividida $f[x_0,\dots,x_n]$ es invariante frente a permutaciones de $x_0,\dots,x_n$, es decir, si $\sigma \in S_{n+1}$, entonces

$$f[x_0,\dots,x_n] = f[x_{\sigma(0)},\dots,x_{\sigma(n)}].$$

♡

Demostración En la demostración anterior no hemos elegido ningún orden para los puntos $x_0,\dots,x_n$

Pero $f[x_0,\dots,x_n]$ es el coeficiente de x^n. Luego invariante respecto a la elección de los puntos (unicidad del polinomio). La demostración iría, sea σ ... entonces construimos los polinomios tal y cual, pero son el mismo y por tanto con el mismo coef. principal. □

Teorema 4.4

Sean P_n el polinomio interpolador de una función f en $n+1$ puntos distintos, $x_0,x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$. Para todo $\bar{x} \neq x_0,\dots,x_n$,

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_0,x_1,\dots,x_n,\bar{x}]\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i).$$

♡

Demostración Basta considerar el polinomio interpolador de f en x_0, ..., $x_n, \bar{x}$. Entonces

$$q(x) = P_n(x) + f[x_0,x_1,\dots,x_n,\bar{x}]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Ahora basta considerar que $q(\bar{x}) = f(\bar{x})$. □

Corolario 4.3

Si $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ y $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

♡

4.1.3 Interpolación de Hermite

Teorema 4.5

Sean $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, y

$$y_i^{(j)}, \quad 0 \le i \le n, \quad 0 \le j \le m_i.$$

Existe un único polinomio de grado menor o igual que $m := n + \sum_{i=0}^{n} m_i$ tal que

$$P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad 0 \le i \le n, \quad 0 \le j \le m_i.$$

♡

El polinomio definido por el Teorema anterior se denomina **polinomio interpolador de Hermite***.*

Definimos las diferencias divididas como

$$\begin{aligned} f[x_k,x_k] &= f'(x_k), \\ f[x_k,x_k,x_k] &= \frac{f''(x_k)}{2}, \\ &\dots, \\ f[x_k, \overset{m}{\dots}, x_k] &= \frac{f^{m-1)}(x_k)}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Denotemos

$$\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{m} = \{x_0, \overset{m_0+1}{\dots}, x_0, x_1, \overset{m_1+1}{\dots}, x_1, \dots, x_n, \overset{m_n+1}{\dots}, x_n\}$$

Entonces el polinomio interpolador de Hermite es

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m} f[\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - \tilde{x}_i).$$

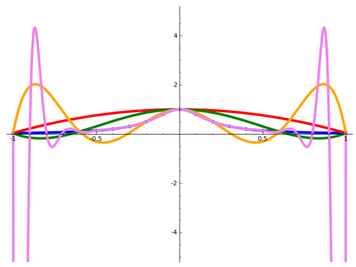
4.1.4 Fenómeno de Runge

El ajuste de una curva mediante polinomios de interpolación de grado alto, esto es, para un conjunto numeroso de datos, suele resultar poco satisfactoria, pues produce oscilaciones en los extremos.

Fenómeno de Runge Runge observó que si interpolamos la función

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2},\ x \in [-1, 1]$$

en puntos equiespaciados, la distancia entre la función y el polinomio de interpolación, con la norma infinito, tiende a infinito cuando aumentamos el número de puntos.



4.2 Interpolación polinomial a trozos: splines

Interpolación polinomial a trozos: splines La interpolación polinomial a trozos consiste en construir un polinomio de grado 1, 2 o 3 para cada par de nodos consecutivos (x_k, y_k) *y* (x_{k+1}, y_{k+1}) *La curva definida mediante estos “trozos” se denomina* **spline**. *Estudiaremos:*

1. *Interpolación lineal a trozos: splines lineales*
2. *Interpolación cúbica a trozos: splines de Hermite*
3. *Interpolación cúbica a trozos: splines cúbicos*

4.2.1 Splines lineales

Splines lineales Consisten simplemente en unir los nodos o puntos mediante segmentos. Así, dado el par de nodos $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$*, definimos el segmento que los une:*

$$S_k(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k),\ x \in [x_k, x_{k+1}]$$

con lo que el spline lineal de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ *es la función definida a trozos:*

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0, \ldots, n-1$$

4.2.2 Interpolación cúbica a trozos de Hermite

Nos dan

- $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$,
- $y_0, y_1, \ldots, y_n$,
- $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$.

Queremos una función f tal que

$$f(x_k) = y_k, \quad f'(x_k) = y'_k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Vamos a obtener una función de la forma

$$f(x) = \Big\{ a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k, \quad x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Es decir, en cada intervalo (x_{k-1}, x_k) tomamos el polinomio cúbico de Hermite.

4.2.3 Splines cúbicos

Se define la curva en $[x_0, x_n]$ a trozos

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n$$

donde $S_k(x)$ es un polinomio cúbico y se impone que

1. *S interpole: $S_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $S_k(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n$*
2. *S en $\mathcal{C}^1([x_0, x_n])$: $S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$*
3. *S en $\mathcal{C}^2([x_0, x_n])$: $S''_{k-1}(x_k) = S''_k(x_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$*

Para tener una única solución del sistema, formado por $4n-2$ ecuaciones y $4n$ incógnitas, debemos imponer dos restricciones más. Según la forma de imponerlas, podemos definir distintos tipos de splines.

1. *Spline cúbico natural: este spline cúbico es el que minimiza la energía de tensión.*

$$S''(x_0) = 0, \quad S''(x_n) = 0.$$

2. *Spline periódico (suponiendo que $y_0 = y_n$):*

$$S'(x_0) = S'(x_n), \quad S''(x_0) = S''(x_n)$$

3. *Spline cúbico sujeto: Suponemos conocidos y'_0, y'_n e imponemos*

$$S'(x_0) = y'_0, \quad S'(x_n) = y'_n$$

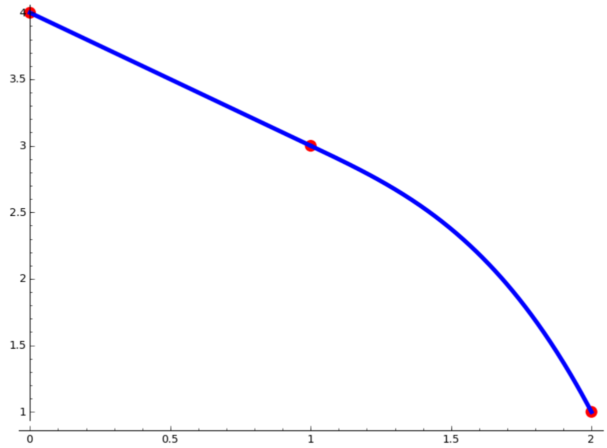
Ejemplo 4.2 *Spline cúbico natural que interpola $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,1)$.*

Tenemos el sistema

$$\begin{array}{r} S_0(0) = 4 \rightarrow \\ S_0(1) = 3 \rightarrow \\ S_1(1) = 3 \rightarrow \\ S_1(2) = 1 \rightarrow \\ S'_0(1) = S'_1(1) \rightarrow \\ S''_0(1) = S''_1(1) \rightarrow \\ S''_0(0) = 0 \rightarrow \\ S''_1(2) = 0 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ c_0 \\ b_0 \\ a_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$S_0(x) = 4 - x, \quad S_1(x) = 5 - 4x + 3x^2 - x^3.$$



4.2.4 Método de los momentos

Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Supongamos que tenemos valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ y sea S el spline cúbico natural tal que $S(x_i) = y_i$. En esta sección veremos un método efectivo para calcularlo. Además, probaremos la existencia y unicidad de dicho spline.

Como vamos a imponer que $S \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$, podemos definir los **momentos** *de S en $x_0, \ldots, x_n$ como*

$$z_i := S''(x_i), \quad 0 \le i \le n.$$

Denotemos

$$h_i := x_{i+1} - x_i, \quad b_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i},$$

$$u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad v_i = 6(b_i - b_{i-1}).$$

Proposición 4.2

Los momentos z_i son las soluciones del siguiente sistema tridiagonal

$$\begin{cases} z_0 & = 0, \\ h_{i-1} z_{i-1} + u_i z_i + h_i z_{i+1} & = v_i, \quad (1 \le i \le n-1) \\ z_n & = 0. \end{cases}$$

♠

Demostración Fijado un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $S''(x)$ restringido a dicho intervalo es un polinomio de grado 1, S_i, tal que $S_i''(x_i) = z_i$ y $S''(x_{i+1}) = z_{i+1}$. Entonces

$$S_i''(x) = z_i \frac{x - x_i}{h_i} + z_{i+1} \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Integrando dos veces, tenemos que

$$S_i(x) = z_i \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + z_{i+1} \frac{(x_{i+1} - x)^3}{h_i} + Ax + B, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Imponiendo que $S(x_i) = y_i$ y que $S(x_{i+1}) = y_{i+1}$, tenemos

$$Ax + B = \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1} \right) (x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i \right) (x_{i+1} - x).$$

Luego

$$\begin{aligned} S_i(x) =& \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 \\ &+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1}\right)(x-x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i\right)(x_{i+1}-x). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $z_0,\dots,z_n$ son soluciones del sistema lineal anterior. Es inmediato que $z_0 = z_n = 0$ por ser el spline natural. Calculamos $S'_{i-1}(x_i), S'_i(x_i)$,

$$S'_i(x_i) = -\frac{z_i}{2h_i}(x_{i+1}-x_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i\right).$$

$$S_{i-1}(x_i) = \frac{z_i}{2h_{i-1}}(x_i-x_{i-1})^2 + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}z_i\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1}\right).$$

Ahora, teniendo en cuenta que $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$, tenemos

$$\frac{1}{6}h_{i-1}z_{i-1} + \frac{2}{6}(h_i + h_{i-1})z_i + \frac{1}{6}h_{i+1}z_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

Multiplicando por 6 obtenemos la ecuación buscada. □

Teorema 4.6

Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Supongamos que tenemos valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$. El spline cúbico natural S que verifica $S(x_i) = y_i$, $0 \le i \le n$, está formado por los polinomios

$$\begin{aligned} S_i(x) =& \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 \\ &+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1}\right)(x-x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i\right)(x_{i+1}-x). \end{aligned}$$

para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i < n$. ♡

Demostración Es inmediata a partir de la demostración de la proposición anterior. □

4.3 Teoría de la aproximación

El **problema de aproximación** *consiste en, dada una función continua f y una familia de funciones $\mathcal{F}$, obtener $g \in \mathcal{F}$ tal que la distancia entre f y g sea mínima.*

Por tanto, necesitaremos fijar dos elementos:

1. *La definición de distancia entre dos funciones.*
2. *La familia de funciones $\mathcal{F}$.*

Un **espacio prehilbertiano** *$\mathcal{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), dotado de un producto escalar, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es decir, una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilineal, simétrica y definida positiva. A partir del producto escalar, definimos una norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Ejemplos

1. *$\mathbb{R}^n$ con el producto escalar*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

2. *$\mathcal{C}_w[a,b]$ el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$ con el producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx,$$

donde w es una función continua y positiva en $[a, b]$.

Espacios prehilbertianos Dadas $f, g \in \mathcal{C}$, decimos que f y g son ortogonales, $f \perp g$, si $\langle f, g\rangle = 0$.

Lema 4.1

Sea $\mathcal{C}$ un espacio prehilbertiano, se verifica

1. $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\langle f, g\rangle$.
2. $f \perp g$ *si y sólo si* $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.
3. $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$.
4. $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$.

♡

Demostración

1. Aplicando la definición
2. Pitágoras: inmediato
3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
   Supongamos que no se verifica. $|\langle f, g\rangle| > \|f\|\|g\|$ En particular, $\|g\|$ no puede ser cero, pues entonces se daría la igualdad Podemos suponer que $\|g\| = 1$. $|\langle f, g\rangle| > \|f\|$. Reescalando, podemos suponer $\langle f, g\rangle = 1$, luego $\|f\| < 1$. Entonces, llegamos a contradicción, pues
   $$0 \leq \|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, g\rangle + \|g\|^2 = \|f\|^2 - 1$$
4. Igualdad del paralelogramo. Es inmediata a partir del primer punto.

□

Sea $\mathcal{C}$ un espacio prehilbertiano y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{C}$. Dada $f \in \mathcal{C}$, decimos que $g \in \mathcal{S}$ es la **mejor aproximación de f en $\mathcal{S}$** *si*

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| \quad \textit{para todo } h \in \mathcal{S}.$$

Decimos que $h \in \mathcal{C}$ es **ortogonal** *a $\mathcal{S}$, $h \perp \mathcal{S}$, si $\langle h, g\rangle = 0$ para todo $g \in \mathcal{S}$.*

Teorema 4.7

Sea $\mathcal{C}$ un espacio prehilbertiano y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{C}$.
Dada $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{S}$ es la mejor aproximación de f en $\mathcal{S}$ si y sólo si $f - g \perp \mathcal{S}$.

♡

Demostración Si $f - g$ es ortogonal, entonces por el teorema de pitágoras

$$\|f - h\|^2 = \|f - g + g - h\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - h\|^2 \geq \|f - g\|^2.$$

Recíprocamente, si g es la mejor aproximación, consideremos h y $\lambda > 0$. Entonces

$$0 \leq \|f - g + \lambda h\|^2 - \|f - g\|^2 = \|f - g\|^2 + 2\lambda\langle f - g, h\rangle + \lambda^2\|h\| - \|f - g\|^2 = \lambda(2\langle f - g, h\rangle + \lambda\|h\|^2).$$

Tomando límite cuando $\lambda \to 0^+$, tenemos que $\langle f - g, h\rangle \geq 0$. Análogamente, tomando $-h$ en lugar de h, $\langle f - g, h\rangle \leq 0$ En consecuencia, $\langle f - g, h\rangle = 0$, luego $f - g \perp \mathcal{S}$.

□

Ejemplo 4.3 *Aproximar* $\sin x$ *por un polinomio de la forma $g(x) = ax + bx^3 + cx^5$ con la norma inducida por el producto esclar*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Dado un espacio prehilbertiano, decimos que un conjunto finito de vectores o una sucesión de vectores $f_1, f_2, \ldots$ es **ortogonal** *si*

$$\langle f_i, f_j\rangle = 0 \quad \textit{para todo } i \neq j.$$

Decimos que es **ortonormal** *si*

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Teorema 4.8

Sea $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores de $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{S}$ el subespacio generado por $\{g_1, \ldots, g_n\}$ y $f \in \mathcal{C}$. Entonces $g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ es la mejor aproximación de f en $\mathcal{S}$ si y sólo si

$$c_i = \langle f, g_i \rangle / \langle g_i, g_i \rangle, \quad i = 1, \ldots, n.$$

♡

4.3.1 Aproximación cuadrática polinomial

Fijado un intervalo I y una función w, continua y positiva en el interior de I. Denotaremos $\mathcal{C}_w(I)$ al espacio prehilbertiano de las funciones continuas sobre I dotado del producto escalar

$$\langle f|g \rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\, dx, \quad f, g \in \mathcal{C}_w(I).$$

Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Dada $f \in \mathcal{C}_w(I)$, buscamos la mejor aproximación de f en $\mathcal{P}_n$.

Como hemos visto antes, necesitaremos una base ortogonal de $\mathcal{P}_n$. Para ello podemos aplicar la ortogonalización de Gram-Schmidt a $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Teorema 4.9

Consideremos los polinomios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - a_1$ y

$$p_i(x) = (x - a_i)p_{i-1}(x) - b_i p_{i-2}(x), \quad i = 2, \ldots, n,$$

donde

$$a_i = \frac{\langle xp_{i-1}, p_{i-1} \rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle}, \quad b_i = \frac{\langle xp_{i-1}, p_{i-2} \rangle}{\langle p_{i-2}, p_{i-2} \rangle}.$$

Entonces p_0, ..., p_n, es una base ortogonal de $\mathcal{P}_n$.

♡

Demostración Usaremos que $\langle fg, h \rangle = \langle f, gh \rangle$. p_i es un polinomio mónico de grado i, por definición, luego forman base.

Demostrar que $\langle p_j, p_i \rangle = 0$, $i < j$ por inducción sobre j Definimos pi por la definición. Multiplicamos por pj con $j < i - 2$, tenemos $< pi, pj >=< xpi - 1, pj >=< pi - 1, xpj >$ y xpj se despeja de la definición de $pj + 1$, obteniendo combinación lineal de $pj + 1$,pj,$pj - 1$, $j + 1 < i - 1$. Luego multiplicamos por $pi - 1$ y por $pi - 2$ y obtenemos ai y bi. □

1. *Si tomamos como producto escalar*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Los polinomios de la base ortogonal dada por el Teorema anterior se denominan **polinomios de Legendre**.

2. *Los polinomios de Chebyshev forman una base ortogonal de $\mathcal{P}_n$ con el producto escalar*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$