

### 3. Problemas de resolución numérica de problemas de frontera

**Problema 3.1** Encontrar la solución del problema de valores frontera

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 4. \end{cases}$$

**Problema 3.2** Determinar la ecuación (variacional) que verifica la derivada respecto a la posición inicial de

$$x' = t + tx + (t + 1)x^2.$$

**Problema 3.3** Determinar la ecuación (variacional) que verifica la derivada respecto a la velocidad inicial (en  $t = -1$ ) de

$$x'' = t + tx + (t + 1)x'.$$

Plantear el método de tiro para resolver el problema de valores en la frontera determinado por  $x(-1) = x(1) = 0$ , aplicando el método de Newton-Raphson.

**Problema 3.4** Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} x'' + x' + 10t = 0, \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 2, \end{cases}$$

para  $x(1/2)$  mediante el método de diferencias finitas con  $h = 1/2$ .

#### Ecuación del calor.

**Problema 3.5** Demostrar que para una  $n$  fija, la condición de estabilidad del método explícito es:

$$s < \left(1 + \cos \frac{\pi}{n+1}\right)^{-1}.$$

Para  $n = 10$ , ¿qué valores de  $k$  son válidos?

**Problema 3.6** Probar que hacen falta aproximadamente  $10^7$  puntos en la malla para lograr la estabilidad del método explícito cuando  $h = 10^{-2}$  y  $0 \leq t \leq 10$ . ¿Y para  $h = 10^{-4}$ ?

**Problema 3.7** Demostrar que si  $r > 0$ , entonces

$$\rho((I + rB)^{-1}(I - rB)) = \frac{1 - q}{1 + q},$$

donde

$$q = 4r \sin^2 \left( \frac{\pi}{2n + 2} \right).$$

**Problema 3.8** Demostrar que el método de Crank-Nicolson es estable para todo valor de  $s = k/h^2 > 0$ .

#### Problema de Dirichlet

**Problema 3.9** Resolver el problema de Dirichlet con  $u(x, y) = xy$  para  $x = 0$  o  $x = 1$  o  $y = 0$  o  $y = 1$ , mediante diferencias finitas y  $h = 1/3$ . ¿Qué error se comete?

**Problema 3.10** Plantear el problema de Dirichlet con  $u(x, y) = \sin(xy)$  para  $x = 0$  o  $x = 1$  o  $y = 0$  o  $y = 1$ , mediante diferencias finitas y  $h = 1/4$ .