Sistemas de ecuaciones diferenciales

Introducción

El objetivo de estas prácticas será aplicar los métodos numéricos a un sistema autónomo de la forma

$$x' = F(x),$$

para cierta función $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Cada uno tendréis asignado un sistema autónomo concreto que ha sido relevante en el desarrollo de los sistemas dinámicos, bien por sus aplicaciones, bien por ser el primer ejemplo que muestra cierto tipo de comportamiento del sistema.

Antes de describir los sistemas (y el trabajo asociados a cada uno), vamos a recordar/introducir algunas definiciones y resultados.

Recordemos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio o punto singular si $F(x_0) = 0$. Los puntos de equilibrio son las soluciones constantes del sistema.

Dinámica local

Si un punto no es singular, el Teorema del Flujo Tubular establece que existe un entorno y un cambio de coordenadas que transforma el sistema en $x' = (1, 0, \dots, 0)$.

Supongamos que x_0 es un punto singular hiperbólico, es decir, los autovalores de la matriz jacobiana de F en x_0, A, tienen todos parte real no nula. Entonces el Teorema de Hartman-Grobman prueba la existencia de un entorno U de x_0 y un difeomorfismo $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ tal que el sistema es topologicamente conjugado[1] a su linealizado

$$x' = A(x - x_0).$$

Algunas familias de sistemas de ecuaciones diferenciales

A continuación se describen las familias de ecuaciones a estudiar. Se recomienda ampliar la información de dichas familias, por ejemplo leyendo la entrada de Wikipedia o buscarlo en la bibliografía de las asignaturas de ecuaciones diferenciales.

[1] Informalmente, dos campos son topológicamente conjugados si existe un difeomorfismo que establece una biyección entre las órbitas de las soluciones, ver `http://www.mat.ucm.es/~dazagrar/docencia/edif6.pdf` para más detalles

Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol forzado tiene como ecuación:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - A\sin(\omega t) = 0,$$

donde μ, A, ω son parámetros positivos. Cuando $A = 0$ es el oscilador de Van der Pol clásico.

Se pide:

1. Considerar el caso no-forzado, es decir, con $A = 0$. Para este modelo:
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Dibujar el campo de pendientes (para $\mu = 1$, por ejemplo).
   (c) Calcular los puntos de equilibrio.
   (d) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio.

2. Para el modelo del caso anterior (con $\mu = 1$):
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (en el plano xy y también x en función del tiempo).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.

3. (Opcional) Calcular la frecuencia del ciclo límite y considerar $A = 1$ y ω igual a dicha frecuencia. Con alguno de los métodos anteriores, calcular una solución y representarla.

Depredador-presa

Sean $x(t)$, $y(t)$ la densidad de poblaciones de dos especies distintas en un instante de tiempo t, tales que la población y corresponda a una especie que se alimente principalmente de la especie correspondiente a x.

Un modelo propuesto para estos sistemas es

$$x' = x(a_1 - a_2x - a_3y), \quad y' = y(-b_1 + b_2x - b_3y),$$

donde las cantidades a_i, b_i son mayores o iguales a cero.

Se pide:

1. Considerar el modelo
$$x' = x(1 - y - ax), \quad y' = y(-1 + x),$$
con $a = 0$ se corresponde con el modelo original de Lotka-Volterra.

   Para este modelo:

   (a) Calcular los puntos de equilibrio.

   (b) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio.

   (c) Dibujar el campo de pendientes (tomar varios valores de a, uno $a = 0$ y otros con $0 < a$).

2. Para el modelo del caso anterior (para $a = 0$ y para algún $0 < a < 1$ fijado):

   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (en el primer cuadrante).

   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.

   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.

   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.

3. (Opcional) Estudiar qué ocurre cuando a toma valores cercanos a 1.

Problema de los tres cuerpos

Consideremos tres cuerpos en el espacio sometidos únicamente a las fuerzas de atracción gravitatorias entre ellos.

Si la posición del i-ésimo cuerpo en el instante de tiempo t la denotamos $r_i(t) \in \mathbb{R}^3$, entonces es solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|r_j - r_i|^3}(r_j - r_i),$$

donde hemos reescalado el tiempo para que la constante de gravitación universal sea igual a 1.

Para simplificar el modelo, supondremos que todas las masas son unitarias y que se mueven en el mismo plano.

Se pide:

1. En un primer momento, tomar el modelo con sólo dos cuerpos.
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Calcular los puntos de equilibrio (no deberías obtener ninguno).
2. Para el modelo anterior:
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (mediante una animación de las posiciones).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Considerar el modelo de tres cuerpos y calcular algunas soluciones aproximadas, con el método que mejor haya funcionado en el de dos cuerpos.

Doble péndulo

Supongamos que tenemos un péndulo y en el extremo inferior colocamos otro péndulo de la misma longitud. Si θ_1, θ_2 es el ángulo respecto de la vertical del primer y sengudo péndulo, respectivamente, entonces las ecuaciones que describen el movimiento de los péndulos son

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \frac{2p_1 - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_2}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\
\dot{\theta}_2 &= \frac{8p_2 - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_1}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\
\dot{p}_1 &= -3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3k\sin(\theta_1)\right), \\
\dot{p}_2 &= -3\left(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + k\sin(\theta_2)\right),
\end{aligned}$$

donde p_1, p_2 son los momentos de inercia (podemos pensar en ellos como las velocidades) y k es una constante positiva que depende de la longitud del péndulo.

Se pide:

1. Considerar el modelo con $k = 1$:
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Calcular los puntos de equilibrio. Dibujar el péndulo en las distintas posiciones de equilibrio.
   (c) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio y pensar qué quieren decir.
2. Para el modelo del caso anterior (con $k = 1$):
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (en el plano xy y también x en función del tiempo).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Encontrar soluciones periódicas en el sistema.

Problema circular restringido de los tres cuerpos

Supongamos que tenemos dos cuerpos en una órbita circular y colocamos un tercer cuerpo de masa despreciable. Si $x(t), y(t), z(t)$ son las coordenadas de este tercer cuerpo en un instante de tiempo t, entonces son soluciones de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\ddot{x} =& x + 2\dot{y} - \left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3} \right), \\
\ddot{x} =& y - 2\dot{x} - \left(\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3} \right), \\
\ddot{z} =& - \left(\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} + \frac{\mu z)}{r_2^3} \right),
\end{aligned}$$

donde $(\mu, 0, 0)$, $(1-\mu, 0, 0)$ son las posiciones de los dos cuerpos en órbita circular (hemos hecho un cambio de variables para que queden fijos), $1-\mu, \mu$ sus masas (en las unidades adecuadas) y

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2)}, \quad r_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2)}.$$

Se pide:

1. Considerar el modelo con $\mu = 2/3$ y supongamos que nos restringimos al plano (es decir, no está la ecuación del eje z):
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Calcular los puntos de equilibrio (numéricamente).
   (c) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio.

2. Para el modelo del caso anterior (con $\mu = 2/3$):
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (mediante una animación).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.

3. (Opcional) Considerar la ecuación del eje z y dibujar calcular alguna solución con el método del apartado anterior que mejor haya funcionado.

Circuito de Chua

El circuito electrico de Chua es un circuito, formado por dos condensadores, una bobina y una resistencia no lineal, que exhibe caos. Sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(y - x - f(x)) \\ y' &= (x - y + z) \\ z' &= -\beta y \end{aligned}$$

donde x, y, z denotan el voltaje en dos condensadores y la intensidad en una bobina, las constantes α, β son positivas y una posible función f es

$$f(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} \left(|x+1| - |x-1|\right),$$

donde m_0, m_1 son negativas.

1. Considerar el modelo con las constantes $m_0 = -1.5, m_1 = -0.5$. Para este modelo:
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Calcular los puntos de equilibrio.
   (c) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio en el caso particular $a = b = 2$.
2. Para el modelo del caso anterior, fijar $a = b = 2$:
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones.
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Estudiar el linealizado en el caso general.

Atractor de Lorenz

Las ecuaciones del atractor de Lorenz son

$$\begin{aligned} x' =& a(y-x) \\ y' =& x(b-z)-y \\ z' =& xy-cz, \end{aligned}$$

donde a, b, c son parámetros positivos.

1. Considerar el sistema con $a = 10$ y $c = 8/3$. Para este sistema:
   (a) Dibujar el campo de pendientes (para $b = 28$, por ejemplo).
   (b) Calcular los puntos de equilibrio.
   (c) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio para $b = 28$.
2. Para el modelo del caso anterior:
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones.
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio para b arbitrario.