Sistemas de ecuaciones diferenciales

Introducción

El objetivo de estas prácticas será aplicar los métodos numéricos a un sistema autónomo de la forma

$$x' = F(x),$$

para cierta función $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Cada uno tendréis asignado un sistema autónomo concreto que ha sido relevante en el desarrollo de los sistemas dinámicos, bien por sus aplicaciones, bien por ser el primer ejemplo que muestra cierto tipo de comportamiento del sistema.

Algunas familias de sistemas de ecuaciones diferenciales

A continuación se describen las familias de ecuaciones a estudiar. Se recomienda ampliar la información de dichas familias, por ejemplo leyendo la entrada de Wikipedia o buscarlo en la bibliografía de las asignaturas de ecuaciones diferenciales.

Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol forzado tiene como ecuación:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - A\sin(\omega t) = 0,$$

donde μ, A, ω son parámetros positivos. Cuando $A = 0$ es el oscilador de Van der Pol clásico.

Se pide:

1. Considerar el caso no-forzado, es decir, con $A = 0$. Para este modelo:
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Dibujar el campo de pendientes (para $\mu = 1$, por ejemplo).
   (c) Calcular los puntos de equilibrio.
   (d) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio.
2. Considerar ahora los parámetros $\mu = 8.53$, $A = 1.2$ y $\omega = 2\pi/10$:
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (en el plano xy y también x en función del tiempo).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Mira la entrada de Wikipedia del orcilador de Van der Pol. Genera las gráficas que allí aparecen con cualquiera de los métodos que has utilizado. Crea un audio con la onda solución (puedes usar la IA para crear una función que te transforme ondas en sonidos; mejor en Python). Prueba cambiando el parámetro ω.

Cadena trófica

Sean $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ la densidad de poblaciones de tres especies distintas en un instante de tiempo t, tales que la población y corresponda a una especie que se alimente principalmente de la especie correspondiente a x y z se alimente de y.

Un modelo propuesto para estos sistemas es

$$x' = x(a_1 - a_2 x - a_3 y), \quad y' = y(-b_1 + b_2 x - b_3 y - b_4 z), \quad z' = z(-c_1 + c_2 y - c_3 z)$$

donde las cantidades a_i, b_i, c_i son mayores o iguales a cero.

Nótese el modelo sólo tiene sentido para $x, y, z \geq 0$, por lo que el estudio se centrará en el primer cuadrante.

Se pide:

1. Considerar el modelo
$$x' = x(1 - y - ax), \quad y' = y(-1 + x),$$
   con $a = 0$ se corresponde con el modelo original de Lotka-Volterra.

   Para este modelo:

   (a) Calcular los puntos de equilibrio.

   (b) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio.

   (c) Dibujar el campo de pendientes (tomar varios valores de a, uno $a = 0$ y otros con $0 < a$).

2. En el modelo inicial, tomar $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1/10$, $c_1 = 1/10$, $c_2 = 1/10$, $c_3 = 1/10$:

   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (en el primer cuadrante).

   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.

   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.

   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.

3. (Opcional) Buscar una órbita cerrada (ciclo límite), modificando los parámetros si es necesario. Mostrar los resultados obtenidos (aunque no se haya encontrado dicha órbita).

Doble péndulo

Supongamos que tenemos un péndulo y en el extremo inferior colocamos otro péndulo de la misma longitud. Si θ_1, θ_2 es el ángulo respecto de la vertical del primer y sengudo péndulo, respectivamente, entonces las ecuaciones que describen el movimiento de los péndulos son

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \frac{2p_1 - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_2}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\
\dot{\theta}_2 &= \frac{8p_2 - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_1}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\
\dot{p}_1 &= -3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 3k\sin(\theta_1)\right), \\
\dot{p}_2 &= -3\left(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + k\sin(\theta_2)\right),
\end{aligned}$$

donde p_1, p_2 son los momentos de inercia (podemos pensar en ellos como las velocidades) y k es una constante positiva que depende de la longitud del péndulo.

Se pide:

1. Considerar el modelo con $k = 1$:
   (a) Calcular los puntos de equilibrio. Dibujar el péndulo en las distintas posiciones de equilibrio.
   (b) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio y pensar qué quieren decir.

2. Para el modelo del caso anterior (con $k = 1$):
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (en el plano xy y también x en función del tiempo).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.

3. (Opcional) Realizar una animación del péndulo doble que muestre su movimiento para ciertas condiciones iniciales. Buscar soluciones periódicas en el sistema.

Problema circular restringido de los tres cuerpos

Supongamos que tenemos dos cuerpos en una órbita circular y colocamos un tercer cuerpo de masa despreciable. Si $x(t), y(t), z(t)$ son las coordenadas de este tercer cuerpo en un instante de tiempo t, entonces son soluciones de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\ddot{x} =& x + 2\dot{y} - \left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3}\right),\\ \ddot{y} =& y - 2\dot{x} - \left(\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3}\right),\\ \ddot{z} =& -\left(\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} + \frac{\mu z)}{r_2^3}\right),\end{aligned}$$

donde $(-\mu, 0, 0)$, $(1-\mu, 0, 0)$ son las posiciones de los dos cuerpos en órbita circular (hemos hecho un cambio de variables para que queden fijos), $1-\mu, \mu$ sus masas (en las unidades adecuadas) y

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2)}, \quad r_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2)}.$$

Se pide:

1. Considerar el modelo con $\mu = 2/3$ y supongamos que nos restringimos al plano (es decir, no está la ecuación del eje z):
   (a) Transformarlo en un sistema autónomo equivalente.
   (b) Calcular los puntos de equilibrio (numéricamente).
   (c) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio.

2. Para el modelo del caso anterior (con $\mu = 2/3$):
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones (mediante una animación).
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.

3. (Opcional) Considera una condición inicial con velocidad nula. Construye la siguiente curva de nivel (superficie de Hill)

$$2\left(\frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) = C, \tag{0.1}$$

   donde $\mu = 1/3$ y C es tal que la condición inicial está en la curva. Dibuja la solución y la curva. ¿Qué ocurre? Prueba con valores de C de modo que los puntos de equilibrio estén en las curvas.

Circuito de Chua

El circuito electrico de Chua es un circuito, formado por dos condensadores, una bobina y una resistencia no lineal, que exhibe caos. Sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(y - x - f(x)) \\ y' &= (x - y + z) \\ z' &= -\beta y \end{aligned}$$

donde x, y, z denotan el voltaje en dos condensadores y la intensidad en una bobina, las constantes α, β son positivas y una posible función f es

$$f(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} \left(|x+1| - |x-1|\right),$$

donde m_0, m_1 son negativas.

1. Considerar el modelo con las constantes $m_0 = -1.5, m_1 = -0.5$. Para este modelo:
   (a) Calcular los puntos de equilibrio.
   (b) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio en el caso particular $a = b = 2$. Deducir el comportamiento de las soluciones en un entorno de los puntos de equilibrio.
2. Para el modelo del caso anterior, fijar $a = b = 2$:
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones.
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Estudiar los puntos de equilibrio del circuito de Chua en función del parámetro m_1. Realizar simulaciones para distintos valores del parámetro en los que cambie el número o la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Atractor de Lorenz

Las ecuaciones del atractor de Lorenz son

$$
\begin{aligned}
x' =& a(y-x)\\
y' =& x(b-z)-y\\
z' =& xy-cz,
\end{aligned}
$$

donde a, b, c son parámetros positivos.

1. Considerar el sistema con $a = 10$ y $c = 8/3$. Para este sistema:
   (a) Dibujar el campo de pendientes (para $b = 28$, por ejemplo).
   (b) Calcular los puntos de equilibrio.
   (c) Estudiar el linealizado en cada punto de equilibrio para $b = 28$.
2. Para el modelo del caso anterior:
   (a) Tomar una condición inicial que no sea punto crítico y aplicar el método de Taylor de orden dos o un método de Runge-Kutta de orden al menos dos para obtener varias (dos o tres) soluciones. Representar dichas soluciones.
   (b) Repetir los cálculos anteriores, ahora usando un método de orden superior para estimar el error de truncamiento. Elegir el número de pasos para que dicho error sea menor que 10^{-5}.
   (c) Aplicar el método de Adams-Bashford con $k = 3$ para aproximar las soluciones anteriores.
   (d) Aplicar un método predictor corrector usando Adams-Bashford con $k = 3$ como predictor y Adams-Moulton con $k = 2$ como corrector. Estimar los errores cometidos.
3. (Opcional) Tomar condiciones iniciales en un segmento y dibujar la superficie que se genera al considerar la soluciones que comienzan en dicho segmento.