Ecuaciones en diferencias
José Luis Bravo
Ecuaciones en diferencias
Ecuaciones en diferencias lineales
Soluciones de la ecuación homogénea
Estabilidad y convergencia
Solución de la ecuación completa
El problema de sumación
Resolución del caso polinomial
Fórmulas de sumación

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Índice

1 Ecuaciones en diferencias

2 Ecuaciones en diferencias lineales
- Soluciones de la ecuación homogénea
- Estabilidad y convergencia
- Solución de la ecuación completa

3 El problema de sumación
- Resolución del caso polinomial
- Fórmulas de sumación

Ecuaciones en diferencias
José Luis Bravo
Ecuaciones en diferencias
Ecuaciones en diferencias lineales
Soluciones de la ecuación homogénea
Estabilidad y convergencia
Solución de la ecuación completa
El problema de sumación
Resolución del caso polinomial
Fórmulas de sumación

Sea $V_{\mathbb{K}}$ el conjunto de sucesiones infinitas de elementos de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), es decir, funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$.

Sean $x, y \in V_{\mathbb{K}}$, definimos las sucesiones $x + y$ y λx, $\lambda \in \mathbb{K}$ como

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n), \quad (\lambda x)(n) = \lambda x(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Estas operaciones dotan a $V_{\mathbb{K}}$ de estructura de espacio vectorial.

Ecuaciones en diferencias

Sea $\phi\colon \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$. Una ecuación en diferencias de orden d escalar es una expresión de la forma

$$\phi(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+d-1), x(n+d)) = 0.$$

Una sucesión $x \in V_{\mathbb{K}}$ es una solución de dicha ecuación si los términos de la sucesión verifican la igualdad para todo n.

Diremos que es explícita si es de la forma

$$x(n+d) = \phi(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+d-1))$$

y autónoma si es de la forma

$$\phi(x(n), x(n+1), \ldots, x(n+d-1), x(n+d)) = 0.$$

Ecuaciones en diferencias

Sea $V_{\mathbb{K}}^n$ el conjunto de sucesiones infinitas de elementos de $\mathbb{K}^n$, es decir, funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}^n$. y sea $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Una ecuación en diferencias de primer orden (autónoma y explícita) es una expresión de la forma

$$X(n+1) = \Phi(X(n)).$$

Una sucesión $X \in V_{\mathbb{K}}^n$ es una solución de dicha ecuación si los términos de la sucesión verifican la igualdad para todo n.

Ecuaciones en diferencias
José Luis Bravo
Ecuaciones en diferencias
Ecuaciones en diferencias lineales
Soluciones de la ecuación homogénea
Estabilidad y convergencia
Solución de la ecuación completa
El problema de sumación
Resolución del caso polinomial
Fórmulas de sumación

Se define el operador desplazamiento E como el operador lineal $E\colon V_{\mathbb{K}} \to V_{\mathbb{K}}$ definido por

$$(Ex)(n) = x(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nótese que si denotamos E^2 a la composición de E consigo mismo, entonces $(E^2x)(n) = x(n+2)$. Análogamente,

$$(E^i x)(n) = x(n+i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

y por convenio

$$(E^0 x)(n) = x(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ecuaciones en diferencias

Se denomina *diferencia progresiva* de primer orden de la sucesión x a la función

$$\Delta x(n) := x(n+1) - x(n).$$

La diferencia progresiva de orden $k > 1$ se define recurrentemente como

$$\Delta^k x(n) := \Delta(\Delta^{k-1} x(n)) = \Delta^{k-1} x(n+1) - \Delta^{k-1} x(n),$$

El operador Δ^k es lineal y se define Δ^0 como la identidad.

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

Soluciones de la ecuación homogénea

Estabilidad y convergencia

Solución de la ecuación completa

El problema de sumación

Resolución del caso polinomial

Fórmulas de sumación

Lema

Se verifica la igualdad

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} x(n+j), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lema

Se verifica la igualdad

$$x(n+k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j x(n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ecuaciones en diferencias

Podemos definir las ecuaciones en diferencias escalares mediante los operadores anteriores, así si la ecuación es

$$x(n+d) = \phi(x(n), x(n+1), \ldots, x(n+d-1)),$$

se puede denotar

$$E^d x(n) = \phi(E^0, E^1, \ldots, E^{d-1})x(n),$$

o equivalentemente

$$\Delta^d x(n) = \phi\left(\Delta^0, \Delta - \Delta^0, \ldots, \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \Delta^j\right) x(n) - \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} \Delta^j x(n).$$

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

Soluciones de la ecuación homogénea

Estabilidad y convergencia

Solución de la ecuación completa

El problema de sumación

Resolución del caso polinomial

Fórmulas de sumación

Teorema

Dados $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$, $q \in V_{\mathbb{K}}$, *existe una única solución,* x, *de la ecuación escalar de orden* d *que verifica* $x(0) = c_0$, $x(1) = c_1$, ..., $x(d-1) = c_{d-1}$.

Ecuaciones en diferencias lineales

Una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes es una expresión de la forma

$$p_r f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \cdots + p_0 f(n) = q(n),$$

donde $p_0, p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $q \in V_{\mathbb{K}}$.

La ecuación en diferencias se dice que es *completa* si $q \not\equiv 0$ y *homogénea* si $q \equiv 0$.

Supondremos que $p_0 p_r \neq 0$ y que $p_0, p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}$, $q \in V_{\mathbb{R}}$. r se denomina orden de la ecuación en diferencias.

Soluciones de la ecuación homogénea

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

Soluciones de la ecuación homogénea

Estabilidad y convergencia

Solución de la ecuación completa

El problema de sumación

Resolución del caso polinomial

Fórmulas de sumación

Consideremos la ecuación homogénea

$$p_r f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \cdots + p_1 f(n+1) + p_0 f(n) = 0.$$

Proposición

El conjunto de soluciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial que denotaremos $H_{\mathbb{C}}$.

Denotaremos por $H_{\mathbb{R}}$ el subespacio vectorial de soluciones reales.

Nótese que $H_{\mathbb{R}}$ se corresponde con las soluciones con condiciones iniciales reales.

Dimensión del espacio de soluciones

Lema

Las soluciones $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \cdots & f_r(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & \cdots & f_r(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(r-1) & f_2(r-1) & \cdots & f_r(r-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Proposición

El espacio vectorial $H_{\mathbb{K}}$ tiene dimensión r sobre $\mathbb{K}$.

Polinomio característico

Consideremos la ecuación

$$f(n+r)+p_{r-1}f(n+r-1)+\cdots+p_1f(n+1)+p_0f(n)=0.$$

Definimos el *polinomio característico* de la ecuación como

$$P(x):=x^r+p_{r-1}x^{r-1}+\cdots+p_1x+p_0.$$

Proposición

Una función de la forma $f(n)=\lambda^n$, $\lambda\neq 0$, es solución de la ecuación en diferencias si y sólo si λ es raíz del polinomio característico.

Caso 1. Raíces simples

Proposición

Supongamos que las raíces del polinomio característico, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, son todas simples. Las funciones $f_1(n) = \lambda_1^n$, ..., $f_r(n) = \lambda_r^n$ son soluciones linealmente independientes y toda solución es de la forma

$$f(n) = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_r\lambda_r^n, \quad c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}.$$

Caso 1. Raíces simples (caso real)

Supongamos que las raíces del polinomio característico, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, son todas simples.

- Si λ_i es compleja, la correspondiente solución es compleja, con lo cual el sistema fundamental así obtenido no nos sirve como base de $H_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$
- Si los coeficientes del polinomio característico son reales y λ_i es raíz compleja, entonces $\bar{\lambda}_i$ también es raíz y λ^n y $\bar{\lambda}^n$ son soluciones de la ecuación.
- Si $\lambda = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, $\quad \bar{\lambda} = \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$. Entonces,
$$\lambda^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), \quad \bar{\lambda}^n = \rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta).$$
- Tenemos las soluciones
$$\frac{\lambda^n + \bar{\lambda}^n}{2} = \rho^n \cos n\theta, \quad \frac{\lambda^n - \bar{\lambda}^n}{2i} = \rho^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Caso 2. Raíces múltiples

Lema

Se verifica la igualdad

$$\Delta^k z(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} z(x+j), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lema

Se verifica la igualdad

$$z(x+k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j z(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Caso 2. Raíces múltiples

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

Soluciones de la ecuación homogénea

Estabilidad y convergencia

Solución de la ecuación completa

El problema de sumación

Resolución del caso polinomial

Fórmulas de sumación

Lema

Si $Q(x)$ es un polinomio de grado $\leq p$, entonces $\Delta^k Q(x) \equiv 0$ para todo $k > p$.

Sea λ una raíz del polinomio característico $P(x)$ de multiplicidad s, es decir,

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{s-1)}(\lambda) = 0, \quad P^{s)}(\lambda) \neq 0.$$

Proposición

Si $Q(n)$ es un polinomio de grado menor o igual a $s-1$, entonces $f(n) = \lambda^n Q(n)$ es solución de la ecuación homogénea.

Caso 2. Raíces múltiples

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ son todas las raíces del polinomio característico, con multiplicidades $s_1, s_2, \ldots, s_p$, respectivamente, entonces $s_1 + s_2 + \cdots + s_p = r$ y las r funciones

$$\begin{array}{c} \lambda_1^n,\ n\lambda_1^n,\ n^2\lambda_1^n,\ \ldots,\ n^{s_1-1}\lambda_1^n, \\ \lambda_2^n,\ n\lambda_2^n,\ n^2\lambda_2^n,\ \ldots,\ n^{s_2-1}\lambda_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_p^n,\ n\lambda_p^n,\ n^2\lambda_p^n,\ \ldots,\ n^{s_p-1}\lambda_p^n, \end{array}$$

son soluciones de la ecuación homogénea.

Caso 2. Raíces múltiples

Proposición

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j \, (i \neq j)$, *y sean* $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{N}$. *Las funciones*

$$\begin{array}{c} \lambda_1^n, \;\; n\lambda_1^n, \;\; n^2\lambda_1^n, \;\; \ldots, \;\; n^{t_1}\lambda_1^n, \\ \lambda_2^n, \;\; n\lambda_2^n, \;\; n^2\lambda_2^n, \;\; \ldots, \;\; n^{t_2}\lambda_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_p^n, \;\; n\lambda_p^n, \;\; n^2\lambda_p^n, \;\; \ldots, \;\; n^{t_p}\lambda_p^n, \end{array}$$

definidas en $\mathbb{N}$, *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{C}$.

Caso 2. Raíces múltiples

Supongamos que $P \in \mathbb{R}[x]$.
Sea λ una raíz compleja de P de multiplicidad s. Entonces $\bar{\lambda}$ es una raíz compleja de P de multiplicidad s. Supongamos

$$\lambda = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Las siguientes funciones generan el mismo espacio vectorial que $n^i \lambda^n$, $n^i (\bar{\lambda})^n$, $0 \leq i \leq s-1$:

$$\begin{array}{cccc} \rho^n \cos n\theta, & n\rho^n \cos n\theta, & \dots, & n^{s-1}\rho^n \cos n\theta \\ \rho^n \operatorname{sen} n\theta, & n\rho^n \operatorname{sen} n\theta, & \dots, & n^{s-1}\rho^n \operatorname{sen} n\theta. \end{array}$$

Estabilidad

Consideremos la ecuación homogénea

$$p_r f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \cdots + p_1 f(n+1) + p_0 f(n) = 0.$$

Decimos que una solución f es *acotada* si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(n)| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Decimos que la ecuación es *estable* si todas sus soluciones son acotadas.

Teorema

La ecuación en diferencias homogénea es estable si y sólo si para toda raíz del polinomio característico, λ, se verifica que $|\lambda| \leq 1$ si λ es raíz simple y $|\lambda| < 1$ si λ es raíz múltiple.

Convergencia

Consideremos la ecuación homogénea

$$p_r f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \cdots + p_1 f(n+1) + p_0 f(n) = 0.$$

Decimos que la ecuación es *convergente* si para toda solución $f(n)$ se verfica que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

Teorema

La ecuación en diferencias homogénea es convergente si y sólo si para toda raíz del polinomio característico, λ, se verifica que $|\lambda| < 1$.

Soluciones de la ecuación completa

Proposición

Sea una ecuación en diferencias lineal de coeficienes constantes de orden r

$$p_r f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \cdots + p_1 f(n+1) + p_0 f(n) = q(n).$$

El conjunto de soluciones es un espación afín de dimensión r.

Más aún, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ es solución de la ecuación y $H_{\mathbb{K}}$ es el espacio de soluciones de la correspondiente ecuación homogénea, entonces $f + H_{\mathbb{K}}$ es el espacio de soluciones de la ecuación completa.

Variación de constantes

Vamos a ver como podemos resolver una ecuación en diferencias de la forma

$$f(n+r)+p_{r-1}f(n+r-1)+\cdots+p_0f(n)=\lambda^nQ(n),\quad (n\in\mathbb{N}),$$

en donde $Q(x)$ es un polinomio y $\lambda\in\mathbb{C}$.

Para ello emplearemos el método de variación de constantes, partiendo de soluciones de la forma

$$f(n)=\lambda^n n^s H(n),$$

donde s es la multiplicidad de λ como raíz de P ($s=0$ si no es raíz) y H es un polinomio del mismo grado que Q.

Solución particular

Proposición

Consideremos la ecuación

$$f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \cdots + p_0 f(n) = \lambda^n Q(n),$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $Q(x) = a_t x^t + \cdots + a_1 x + a_0$.

Esta ecuación admite una solución de la forma

$$f(n) = \lambda^n n^s (b_t n^t + \cdots + b_1 n + b_0),$$

donde s *es la multiplicidad de* λ *como raíz del polinomio característico (*$s = 0$ *si* λ *no es raíz).*

El problema de sumación

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

Soluciones de la ecuación homogénea

Estabilidad y convergencia

Solución de la ecuación completa

El problema de sumación

Resolución del caso polinomial

Fórmulas de sumación

Problema (1)

Dada una función real, $f(x)$, definida en un conjunto de la forma $\{x_0 + nh : \ n \in \mathbb{N}\}$, con x_0 y h fijos, calcular la suma

$$f(x_0) + f(x_0 + h) + \cdots + f(x_0 + nh), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Problema (2)

Dada una función real, $g(x)$, definida en $\mathbb{N}$, calcular la suma

$$S_n = g(0) + g(1) + \ldots + g(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

El problema de sumación y las ecuaciones en diferencias

Problema (3)

Dada $g\colon N \to \mathbb{R}$, encontrar $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta F(n) = F(n+1) - F(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposición

Los Problemas 1, 2 y 3 son equivalentes.
Además, si F es solución de $\Delta F(n) = g(n)$, entonces

$$\sum_{j=p}^{q} g(j) = F(q+1) - F(p).$$

Ejemplo

Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{C}$, *calcular*

$$\sum_{j=0}^{n} a^j, \quad para\ n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

Ejemplo

Consideremos las funciones

$$n^{(k)} := \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n-k-1)} & \text{si } k \in \mathbb{Z}^-, \\ 1 & \text{si } k = 0, \\ n(n-1)\ldots(n-k+1) & \text{si } k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, calcular la solución de

$$\Delta F(n) = n^{(k)}.$$

Caso polinomial

Vamos a buscar soluciones (polinómicas) de

$$\Delta F(x) = g(x).$$

donde

$$g(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j.$$

Supongamos que tenemos funciones F_j tales que $\Delta F_j(x) = x^j$, $0 \leq j \leq k$. Entonces la función

$$F(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j F_j(x),$$

es solución de $\Delta F(x) = g(x)$.

Números de Bernoulli

Se definen los *números de Bernoulli*, B_0, B_1, ..., como los que verifican

$$B_0 = 1, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad n = 2, 3, \dots,$$

Los *polinomios de Bernoulli* se definen a partir de los números de Benoulli como

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \qquad n = 0, 1, \dots.$$

Propiedades I

Proposición

Los polinomios y números de Bernoulli tienen las siguientes propiedades:

i) $B_n(0) = B_n, \quad n = 0, 1, \ldots.$

ii) $B_n(1) = B_n, \quad n = 2, 3, \ldots.$

iii)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Propiedades II

Proposición

Los polinomios y números de Bernoulli tienen las siguientes propiedades:

iv) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$

v) $\Delta B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n = 0, 1, \ldots.$

vi)

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x), \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Propiedades III

Proposición

Se verifican las siguientes propiedades:

i) $B_{2n}\left(\frac{1}{2}+x\right) = B_{2n}\left(\frac{1}{2}-x\right), \quad n = 0, 1, \ldots.$

ii) $B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}+x\right) = -B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}-x\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$

iii) $B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$

iv) $B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) = B_{2n-1} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$

v) $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$

Raíces en el intervalo $[0, 1]$

Proposición

i) *En el intervalo* $[0, 1]$ *los polinomios* B_{2n-1}, *con* $n \geq 2$, *tienen únicamente las raíces* 0, $1/2$, 1.

ii) *En el intervalo* $[0, 1]$ *los polinomios* B_{2n}, *con* $n \geq 1$, *sólo tienen dos raíces, una en el intervalo* $(0, 1/2)$ *y su simétrica en* $(1/2, 1)$

Corolario

i) $B_{2n}B_{2n-2} < 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$

ii) $B_{2n}(x) - B_{2n}$ *tiene signo constante en* $[0, 1]$ *para todo* $n \geq 0$.

Solución de $\Delta F(x) = g(x)$

Teorema

Consideremos la ecuación

$$\Delta F(x) = g(x),$$

donde $g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ *es un polinomio. Entonces una solución de la ecuación es*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(x).$$

Fórmula de Euler-Maclaurin

Teorema (Fórmula de Euler-Maclaurin)

Sea g una función de clase $\mathcal{C}^n$ en $[m,p]$, entonces

$$\sum_{x=m}^{p-1} g(x) = \int_m^p g(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{B_i}{i!}\left(g^{i-1)}(p) - g^{i-1)}(m)\right) - \frac{1}{n!}\int_0^1 (B_n(t) - B_n)\left(\sum_{x=m}^{p-1} g^{n)}(x+1-t)\right)dt.$$

Fórmula de Euler-Maclaurin (Demostración)

En primer lugar,

$$\int_k^{k+1} g(t)\,dt = \int_0^1 g(k{+}1{-}t)\,dt = \int_0^1 g(k{+}1{-}t)B_0(t)\,dt = *$$

Por integración por partes,

$$\begin{aligned} * =& g(k+1-t)B_1(t)|_0^1 + \int_0^1 g'(k+1-t)B_1(t)dt \\ =& \frac{1}{2}\left(g(k)+g(k+1)\right) + \frac{B_2(t)}{2!}g'(k+1-t))|_0^1 \\ &+ \int_0^1 g''(k+1-t)\frac{B_2(t)}{2!}dt = ** \end{aligned}$$

Fórmula de Euler-Maclaurin (Demostración)

Ecuaciones en diferencias

José Luis Bravo

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

Soluciones de la ecuación homogénea

Estabilidad y convergencia

Solución de la ecuación completa

El problema de sumación

Resolución del caso polinomial

Fórmulas de sumación

Mediante un segundo paso de integración por partes

$$\begin{aligned}
** =&\frac{1}{2}\left(g(k)+g(k+1)\right)-\left(g'(k+1)-g'(k)\right)\frac{B_2}{2!}\\
&+\int_0^1 g''(k+1-t)\frac{B_2(t)}{2!}dt\\
=&\frac{1}{2}\left(g(k)+g(k+1)\right)-\sum_{j=2}^{n}\left(g^{i-1)}(k+1)-g^{i-1)}(k)\right)\frac{B_i}{i!}\\
&+\int_0^1 g^{n)}(k+1-t)\frac{B_n(t)}{n!}!dt = ***
\end{aligned}$$

Fórmula de Euler-Maclaurin (Demostración)

Y repitiendo el proceso

$$
\begin{aligned}
*** =& \frac{1}{2}\left(g(k)+g(k+1)\right)-\sum_{j=2}^{n}\left(g^{i-1)}(k+1)-g^{i-1)}(k)\right)\frac{B_i}{i!}\\
&+\int_0^1 g^{n)}(k+1-t)\frac{B_n(t)}{n!}dt\\
=& g(k)-\sum_{j=1}^{n}\left(g^{i-1)}(k+1)-g^{i-1)}(k)\right)\frac{B_i}{i!}\\
&+\int_0^1 g^{n)}(k+1-t)\frac{B_n(t)}{n!}dt.
\end{aligned}
$$

Fórmula de Euler-Maclaurin (Demostración)

Despejando, tenemos

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_k^{k+1} g(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} (g^{i-1)}(k+1) - g^{i-1)}(k))\frac{B_i}{i!} \\ &\quad - \int_0^1 g^{n)}(k+1-t)\frac{B_n(t)}{n!}dt \\ &= \int_k^{k+1} g(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n-1} (g^{i-1)}(k+1) - g^{i-1)}(k))\frac{B_i}{i!} \\ &\quad - \int_0^1 g^{n)}(k+1-t)\frac{B_n(t) - B_n}{n!}dt. \end{aligned}$$

Para concluir, calculamos el sumatorio y obtenemos la expresión buscada.

Fórmula de sumación de Euler

Corolario (Fórmula de sumación de Euler)

Se $g(x)$ un polinomio de grado n. Entonces,

$$\sum_{x=m}^{p-1} g(x) = \int_m^p g(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j!} \left(g^{j-1)}(p) - g^{j-1)}(m) \right).$$