Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

José Luis Bravo

Índice

El problema de Cauchy

Consideramos el **problema de Cauchy o de valor inicial**

$$\left.\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\}$$

con f definida en $S = \{(t,x) \ : \ a \leq t \leq b, \ x \in \mathbb{R}\}$ y $(t_0, x_0) \in S$.

Llamaremos **solución del problema de valor inicial** a $x \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tal que $x(t_0) = x_0$ y

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Forma integral

Proposición

Sea $x \in \mathcal{C}^1([a,b])$ solución del problema de valor inicial. Si $f \in \mathcal{C}(S)$, entonces

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema (Existencia y unicidad local de soluciones)

Supongamos que f es continua y localmente Lipschitz respecto a x en (t_0, x_0). Sean $\delta, L > 0$ tal que para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L|x_1 - x_2|.$$

Entonces existe una única solución del problema de valor inicial, $x(t)$ definida para todo $|t - t_0| < \min(\delta, \delta/M)$, donde

$$M = \max\{|f(t, x)| \colon |t - t_0| < \delta, \ |x - x_0| < \delta\}.$$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema (Existencia y unicidad global de soluciones)

Sea f continua y lipschitziana respecto de la segunda variable en S.

Entonces para cada $(t_0, x_0) \in S$ existe una única solución del problema de valor inicial definida en $[a, b]$.

Ejemplo

La solución del problema de valor inicial $x' = x^2$, $x(0) = 1$ no está definida en $[-1, 1]$.

Sin embargo, la solución de $x' = x^2 - 4$, $x(0) = 1$, está definida en $\mathbb{R}$.

Continuidad respecto de las condiciones iniciales

Teorema (Continuidad respecto de las condiciones iniciales)

Sea $f \in \mathcal{C}(S)$ lipschitziana respecto de la segunda variable.

Dado $(t_0, x_0) \in S$, denotemos $x(t; t_0, x_0)$ a la solución (maximal) que pasa por dicho punto y sea $[t_0, T)$ su intervalo de definición a la derecha de t_0.

Entonces para todo $t_0 < t_1 < T$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon, t_1)$ tal que $x(t; \tau, \psi)$ está definida en $[t_0, t_1]$ y

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; \tau, \psi)| < \epsilon, \qquad \text{para todo } t \in [t_0, t_1],$$

siempre que

$$|\tau - t_0| < \delta(\epsilon, t_1), \quad |x_0 - \psi| < \delta(\epsilon, t_1).$$

Estabilidad

Consideremos la siguiente perturbación del PVI,

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) + \delta(t), \qquad \text{para todo } t \in [a, b] \\ y(t_0) &= x_0 + \delta_0, \end{aligned}$$

donde δ es una función continua en $[a, b]$.
Decimos que el PVI es **estable en el sentido de Liapunov** en $[a, b]$ si existen $C, \epsilon_0 > 0$ tal que para todos $\epsilon < \epsilon_0$, $|\delta_0|, |\delta(t)| < \epsilon$, $t \in [a, b]$, se verifica

$$|y(t) - x(t)| < C\epsilon, \quad t \in [a, b].$$

Estabilidad

Proposición

Si $f \in \mathcal{C}(S)$ y lipschitziana respecto de x en S, entonces la solución del PVI es estable en el sentido de Liapunov para todo $(t_0, x_0) \in S$.

Resolución numérica del problema de Cauchy

El objetivo será obtener un método que

- Fijados puntos $t_i \in [a, b]$, $0 \leq i \leq N$ (con $t_0 = a$)
- Devuelva aproximaciones x_i del valor $x(t_i)$, $0 \leq i \leq N$, donde $x(t)$ es la solución del PVI.

Decimos que un método es **de paso fijo** si los valores t_i son de la forma

$$t_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \; (N \in \mathbb{N}).$$

Decimos que un método es **de un paso** si el cálculo de cada x_i se basa únicamente en la información que proporciona x_{i-1}.

Decimos que un método es **multipaso** si cada x_i se calcula a partir de varios puntos anteriores.

Métodos de un paso

Consideremos un problema de valor inicial, $x' = f(t, x)$, $x(a) = \eta$.

Tomamos $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$ como $t_0 = a$, $t_i = t_0 + ih$, $1 \leq i \leq n$, con $h = (b - a)/n$.

La **forma general de los métodos de un paso** es

$$\begin{aligned} x_0 &= \eta, \\ x_{i+1} &= x_i + h\phi_f(t_i, x_i; h), \end{aligned}$$

donde ϕ_f es una función definida en $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, que depende del método considerado.

Método de Euler

El **método de Euler** consiste en tomar $\phi_f(t, x; h) = f(t, x)$, es decir,

$$x_0 = \eta, \quad x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i).$$

Ejemplo

Aplicar el método de Euler con un paso y con tres pasos para aproximar el valor de la solución en $x = 1$ del PVI

$$x' = x, \quad x(0) = 1.$$

Métodos implícitos

Otra manera de definir los métodos es en forma **implícita**, en la cual para obtener x_{i+1} es necesario resolver una ecuación. Por ejemplo, el método de Euler implícito es

$$x_0 = \eta, \quad x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}).$$

El método del trapecio, es

$$x_0 = \eta, \quad x_{i+1} = x_i + h\frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})}{2}.$$

En lugar de despejar x_{i+1} en la función f, se puede aproximar utilizando otro método (explícito). Por ejemplo, usando el método del trapecio con el método de Euler, obtenemos el Método de Heun,

$$x_0 = \eta, \quad x_{i+1} = x_i + h\frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_i + hf(t_i, x_i))}{2}.$$

Error global y error de truncamiento

Consideremos un método de un paso explícito.

Se define el **error global** en el punto y_i como

$$e_i = x(t_i) - x_i.$$

Se define el **error local de truncamiento** en el punto x_{i+1} como

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \phi_f(t_i, x(t_i); h).$$

Orden

Sea $\mathcal{M}$ un conjunto de funciones f a las que se les puede aplicar un determinado método ϕ.

Denominamos **orden del método** en $\mathcal{M}$ al menor $p \in \mathbb{N}$ tal que para cada $f \in \mathcal{M}$ existe $C_f \geq 0$ y $h_f > 0$ tales que

$$\tau(h) \leq C_f h^p, \quad (h \leq h_f),$$

donde $\tau(h) = \max_i |\tau_i(h)|$.

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}$. Si ϕ y $\bar{\phi}$ son dos métodos de orden $p < q$, respectivamente, y existen $C_0, H_0 > 0$ tal que $\tau_\phi(h) > C_0 h^p$, para $h \leq H_0$, entonces existe $H_f > 0$ tal que

$$\tau_{\bar{\phi}}(h) < \tau_\phi(h), \quad \textit{para todo } 0 < h \leq H_f.$$

Error global y error de truncamiento

Teorema

Supongamos que ϕ_f está definida en el conjunto

$$H = \{(t, x; h) : \; a \le t \le b, \; x \in \mathbb{R}, \; 0 \le h \le h_0\},$$

y que es lipschitziana respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz $L \ge 0$. Entonces

$$|e_i| = |x(t_i) - x_i| \le \begin{cases} \frac{\tau(h)}{L}(e^{L(t_i - a)} - 1) & si\ L > 0 \\ \tau(h)(t_i - a) & si\ L = 0. \end{cases}$$

Error global y error de truncamiento

Corolario

Si ϕ_f está definida en H, es lipschitziana respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz $L \geq 0$ y el método definido por ϕ_f es de orden p, entonces el error global es de orden p.

Concretamente, si existen $C \geq 0$ y $h_0 > 0$ tales que $\tau(h) \leq Ch^p$ para $h \leq h_0$, entonces

$$\max_i |e_i| \leq \begin{cases} \frac{C}{L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)h^p & \text{si } L > 0 \\ C(b-a)h^p & \text{si } L = 0. \end{cases}$$

Cero-estabilidad

Sea $\{y_i\}$ la sucesión obtenida a partir de una perturbación del método de un paso

$$\begin{aligned} y_0 &= \eta + \delta_0 \\ y_{i+1} &= y_i + h\left(\phi_f(t_i, y_i; h) + \delta_{i+1}\right), \end{aligned}$$

para $\delta_0, \delta_1, \ldots \in \mathbb{R}$.

Denotaremos $x_i^{(h)}$, $y_i^{(h)}$ a las aproximaciones obtenidas por el método y por una perturbación del método, respectivamente, para mostrar su dependencia respecto de h y como N_h el número de pasos del método.

Cero-estabilidad

Diremos que el método es **cero-estable** (o estable en el sentido de Liapunov) si existen $h_0 > 0$, $C > 0$ tal que para todo $h \in (0, h_0]$ y todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, si $\delta_0, \dots, \delta_{N_h} < \epsilon$, entonces

$$|y_i^{(h)} - x_i^{(h)}| < C\epsilon, \quad 0 \leq i \leq N_h.$$

Teorema

Si ϕ_f es continua en H y es lipschitziana respecto de la segunda variable, entonces el método es cero-estable.

Estimación del error de truncamiento

Supongamos que tenemos un método de orden p definido por ϕ_f,

$$x_{i+1} = x_i + h\phi_f(t_i, x_i; h),$$

Para estimar el error que cometemos al pasar de la aproximación en t_i a la aproximación en t_{i+1}. Supongamos que en t_i no cometemos error, es decir, $x(t_i) = x_i$. Sea ϕ_j^* otro método de orden $q > p$, que aplicamos en (t_i, x_i) y denotemos x_{i+1}^* la aproximación obtenida. Entonces

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x_{i+1} &= x(t_{i+1}) - x_{i+1}^* + x_{i+1}^* - x_{i+1} \\ &= x_{i+1}^* - x_{i+1} + h\tau_{i+1}^*(h). \end{aligned}$$

Convergencia

Sea ϕ_f un método de un paso y $\hat{t} \in [a, b]$. Denotaremos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = \frac{\hat{t} - a}{n}, \quad t_i^{(n)} = a + ih_n, \quad x_0^{(n)} = \eta,$$

$$x_{i+1}^{(n)} = x_i^{(n)} + h_n \phi_f(t_i^{(n)}, x_i^{(n)}; h_n).$$

Diremos que el método definido por ϕ_f es **convergente** en el punto $\hat{t} \in [a, b]$ si para todo $\eta \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^{(n)} = x(\hat{t}).$$

Diremos que el método es **convergente** si lo es para todo $\hat{t} \in [a, b]$.

Convergencia

Proposición

Si ϕ_f es continua y lipschitziana respecto de x en H y el método ϕ_f es de orden al menos uno, entonces el método es convergente.

Consistencia

Se dice que el método ϕ_f es **consistente** si

$$\phi_f(t, x; 0) = f(t, x),$$

para todo $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}$. Se dice que el método ϕ es consistente en $\mathcal{M}$, si para toda $f \in \mathcal{M}$, ϕ_f es consistente.

Convergencia y consistencia

Teorema

Sean f, ϕ_f funciones continuas y lipschitzianas respecto de la segunda variable en S y H, respectivamente. Entonces son equivalentes

1. *ϕ_f es consistente.*
2. *ϕ_f es convergente.*

El conjunto de funciones con derivadas acotadas

Consideremos para $k \geq 1$ el conjunto

$$F_k[a,b] = \left\{ f : S \to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ es continua y acotada y tiene} \\ \text{derivadas parciales hasta el orden} \\ k \text{ continuas y acotadas en } S \end{array} \right\}.$$

Toda función $f \in F_k[a,b]$ es continua en $[a,b] \times \mathbb{R}$ y lipschitziana respecto de la segunda variable.

Además, la solución $x(t)$ del problema de valor inicial es una función de clase $k+1$ en $[a,b]$.

Método de Taylor

Sea $f \in F_k[a,b]$ e $x(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(a) &= \eta \end{aligned}\right\}.$$

Definimos las **derivadas totales** de f sobre las soluciones del PVI como

$$\begin{aligned} f^{0)}(t,x) &= f(t,x), \\ f^{k)}(t,x) &= f_t^{k-1)}(t,x) + f_x^{k-1)}(t,x) f(t,x), \;\; k > 0, \end{aligned}$$

donde los subíndices denotan las derivadas parciales.

Método de Taylor

Con la notación anterior, podemos obtener $x(t_{i+1})$ mediante el desarrollo en serie de Taylor de $x(t)$ en t_i,

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + f^{0)}(t_i, x(t_i))h + \cdots + \frac{f^{k-1)}(t_i, x(t_i))}{k!}h^k + \frac{x^{k+1}(t_i + \theta_i h)}{(k+1)!}h^{k+1},$$

o, lo que es lo mismo,

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hT_f^{k)}(t_i, x(t_i); h) + \frac{x^{k+1}(t_i + \theta_i h)}{(k+1)!}h^{k+1},$$

en donde

$$T_f^{k)}(t, x; h) = f^{0)}(t, x) + \frac{f^{1)}(t, x)}{2!}h + \cdots + \frac{f^{k-1)}(t, x)}{k!}h^{k-1}.$$

Método de Taylor

El **método de Taylor de orden** k consiste en aproximar la sucesión $\{x(t_i)\}$ mediante la sucesión $\{x_i\}$, definida por

$$x_0 = \eta$$
$$x_{i+1} = x_i + hT_f^{k)}(t_i, x_i; h).$$

Proposición

Sea $f \in F_k[a,b]$, $k > 1$. Entonces el método de Taylor de orden k es un método convergente, consistente y de orden k.

Planteamiento

Consideremos la ecuación diferencial escrita en forma integral

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))\,dt,$$

Considerando el cambio de variable $g(\theta) = t_i + \theta h$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))\,dt &= \int_{g(0)}^{g(1)} f(t, x(t))\,dt \\ &= h \int_0^1 f(t_i + \theta h, x(t_i + \theta h))\,d\theta. \end{aligned}$$

Los métodos de Runge-Kutta consisten es estimar esta integral mediante una fórmula de cuadratura.

Planteamiento

Consideremos ahora una partición del intervalo $[0,1]$ de la forma

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_m \leq 1$$

y utilicemos una fórmula de cuadratura del tipo

$$\int_0^1 F(\theta)\, d\theta \approx \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu F(\theta_\mu)$$

Planteamiento

Si $\tau_\mu = t_i + \theta_\mu h$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, tenemos

$$\int_0^1 f(t_i + \theta h, x(t_i + \theta h))\, d\theta \approx \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu f(\tau_\mu, x(\tau_\mu)),$$

luego una aproximación de $x(t_{i+1})$ viene dada por

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + h \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu f(\tau_\mu, x(\tau_\mu)).$$

Pero para definir un método explícito, necesitamos que la aproximación dependa únicamente de $x(t_i)$.

Planteamiento

Para aproximar $x(\tau_\mu)$, partimos de

$$x(\tau_\mu) - x(t_i) = h \int_0^{\theta_\mu} f(t_i + \theta h, x(t_i + \theta h))\, d\theta$$

y aplicando la fórmula de cuadratura

$$\int_0^{\theta_\mu} F(\theta)\, d\theta \approx \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu k} F(\theta_k),$$

tenemos

$$x(\tau_\mu) \approx x(t_i) + h \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu k} f(\tau_k, x(\tau_k)).$$

Métodos de Runge–Kutta explícitos

Dados los parámetros

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_m \leq 1$$

$$\alpha_\mu, \quad \mu = 0, 1 \ldots, m$$

$$\alpha_{\mu k}, \quad \mu = 1 \ldots, m, \ k = 0, 1, \ldots, \mu - 1$$

Se define el **método (explícito) de Runge–Kutta de** $m+1$ **etapas** como

$$x_0 = \eta \quad x_{i+1} = x_i + h \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu f(\tau_\mu, \eta_\mu),$$

en donde $\tau_\mu = t_i + \theta_\mu h, \ \ \mu = 0, 1 \ldots, m$

$$\eta_0 = x_i, \quad \eta_\mu = x_i + h \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu k} f(\tau_k, \eta_k), \quad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Fórmulas de cuadratura

Recordemos que una fórmula de cuadratura se dice que es de orden al menos p si proporciona la integral exacta para todo polinomio de grado menor o igual a p.

En el caso de la fórmula de cuadratura definida por los α_μ, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, tenemos que es de orden al menos p si se cumple

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 \theta^k \, d\theta = \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu \theta_\mu^k, \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq p.$$

En particular, será de orden al menos cero si

$$\sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu = 1.$$

Fórmulas de cuadratura

En el caso de la fórmula de cuadratura definida para cada $\mu = 1, \ldots, m$ por los $\alpha_{\mu,k}$, $k = 0, \ldots, \mu - 1$, tenemos que es de orden al menos p si se cumple

$$\frac{\theta_\mu^{j+1}}{j+1} = \int_0^{\theta_\mu} \theta^j \, d\theta = \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu k} \theta_k^j, \quad \text{para todo } 0 \leq j \leq p.$$

En particular, será de orden al menos cero si

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu k} = \theta_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Ejemplos

Para $m = 0$ obtenemos el método de Euler.

Para $m = 1$ los parámetros han de verificar

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1, \qquad \theta_0 = 0 \le \theta_1 \le 1, \qquad \alpha_{1\,0} = \theta_1.$$

Algunos casos: $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_1 = \alpha_{1\,0} = 1$:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, x_i) + f\big(t_{i+1}, x_i + hf(t_i, x_i)\big)\Big) \tag{1}$$

$\alpha_0 = 0, \; \alpha_1 = 1, \quad \theta_1 = \alpha_{1\,0} = \frac{1}{2}$:

$$x_{i+1} = x_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}f(t_i, x_i)\right) \tag{2}$$

$\alpha_0 = \frac{1}{4}, \; \alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \theta_1 = \alpha_{1\,0} = \frac{2}{3}$:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{4}f(t_i, x_i) + \frac{3h}{4}f\left(t_i + \frac{2h}{3}, x_i + \frac{2h}{3}f(t_i, x_i)\right) \tag{3}$$

Ejemplos

El método clásico de Runge-Kutta es $m = 3$, con

$$\begin{array}{rrrr}
\theta_0 = 0, & \theta_1 = \frac{1}{2}, & \theta_2 = \frac{1}{2}, & \theta_3 = 1 \\
\alpha_0 = \frac{1}{6}, & \alpha_1 = \frac{1}{3}, & \alpha_2 = \frac{1}{3}, & \alpha_3 = \frac{1}{6} \\
 & \alpha_{1\,0} = \frac{1}{2}, & \alpha_{2\,0} = 0, & \alpha_{3\,0} = 0 \\
 & & \alpha_{2\,1} = \frac{1}{2}, & \alpha_{3\,1} = 0 \\
 & & & \alpha_{3\,2} = 1.
\end{array}$$

Es decir, si $K_1 = f(t_i, x_i)$, $K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}K_1\right)$ $K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}K_2\right)$, $K_4 = f(t_i + h, x_i + hK_3)$, tenemos

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).} \tag{4}$$

Tablas de Butcher

Normalmente un método de Runge-Kutta de $m+1$ pasos se escribe de modo resumido como una tabla (de Butcher):

$$
\begin{array}{c|cccc}
\theta_0 & \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \cdots & \alpha_{0,m} \\
\theta_1 & \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\theta_m & \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,m} \\
\hline
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_m
\end{array}
$$

En el caso de los métodos explícitos, las entradas en la diagonal o por encima han de ser cero, es decir, $\alpha_{i,j} = 0$ si $j \geq i$.

Tablas de Butcher

- Método de Euler y Euler implícito:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- Método de Heun:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- RK4:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Runge-Kutta-Fehlberg

El método de Runge-Kutta-Fehberg proporciona dos métodos de Runge-Kutta con fórmulas de cuadratura evaluadas en los mismos puntos, el primero de orden 5 y el segundo de orden 4.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & \frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & 8 & \frac{3680}{513} & \frac{-845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & \frac{8}{27} & 2 & \frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & \frac{11}{40} & \\
\hline
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & \frac{9}{50} & \frac{2}{55} \\
 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & \frac{1}{5} & 0
\end{array}
$$

Orden de los Métodos de Runge-Kutta

Proposición

Sea $f \in \mathcal{F}_2[a,b]$. Consideremos $m = 1$ y $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, $\theta_0 = 0 \leq \theta_1 \leq 1$, $\alpha_{1\,0} = \theta_1$.

Si la fórmula de cuadratura definida por α_0, α_1 es de grado al menos 1 ($\alpha_1\theta_1 = 1/2$), entonces el método de Runge-Kutta definido por esos parámetros es de orden dos.

En general, para tener un método de Runge-Kutta de orden s hacen falta al menos s etapas. Para orden $s = 1, 2, 3, 4$ bastan s etapas, para orden $s = 5, 6$ bastan $s + 1$ etapas y para $s \geq 7$ hacen falta al menos $s + 2$ etapas.

Convergencia y consistencia

Un método de un paso definido por una función ϕ_f que sea continua y lipschitziana respecto de la segunda variable es convergente si y solo si es consistente.

En los métodos de Runge–Kutta tenemos

$$\phi_f(t, x; h) = \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu f(\tau_\mu, \eta_\mu),$$

es consistente (si la fórmula de cuadratura es de grado cero).

Es fácil comprobar que $\phi_f(t, x; h)$ es continua.

Convergencia y consistencia

Proposición

Si f es lipschitziana respecto de la segunda variable entonces la función ϕ_f que define los métodos de Runge–Kutta también es lipschitziana respecto de la segunda variable, es decir, existe $K \geq 0$ y $h_0 > 0$ tales que

$$|\phi_f(t, x; h) - \phi_f(t, \bar{x}; h)| \leq K|x - \bar{x}|,$$

para todo $t \in [a, b]$, $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $h \in [0, h_0]$.

Problema test

Denominaremos *problema test* al problema de valor inicial lineal

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \quad t > 0, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$. Nótese que la solución $x(t) = e^{\lambda t}$ de este problema verifica

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0, \quad \text{si } \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Estabilidad absoluta

Consideremos un método numérico de un paso explícito aplicado al problema test, definido por ϕ, con paso h y sea $\{x_n\}$ la sucesión de aproximaciones generada por

$$t_0 = 0, \quad t_n = nh, \quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + h\phi(t_n, x_n, h).$$

Diremos que el método es *absolutamente estable* para h y λ si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Denominamos *región de estabilidad absoluta* a

$$\mathcal{A} = \{h\lambda \in \mathbb{C} \colon x_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

Diremos que el método es *A-estable* si $\mathcal{A}$ contiene los complejos con parte real negativa.

Métodos multipaso

Dados $x_0, \ldots, x_{k-1}$, los **métodos de k pasos** generan una sucesión $\{x_n\}$ (tal que x_n es una aproximación de $x(t_n)$) mediante la ecuación en diferencias

$$F(t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, h) = 0.$$

Los *métodos multipaso lineales de k pasos* son aquellos en los que la ecuación en diferencias es de la forma

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

donde $f_{n+j} = f(t_{n+j}, x_{n+j})$, para ciertos $\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_k$.

Orden y tipo de los métodos multipaso

Consideremos un método multipaso lineal definido por los coeficientes $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0,\dots,k}$.

- Diremos que el método es de k pasos si $\alpha_k \neq 0$ (podemos asumir $\alpha_k = 1$) y $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$.
- Diremos que el método es **explícito** si $\beta_k = 0$ e **implícito** si $\beta_k \neq 0$.

Si el método es explícito,

$$x_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}.$$

Métodos ímplicitos

Si el método es implícito, entonces

$$
\begin{aligned}
x_{n+k} &= -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} + h\beta_k f_{n+k} \\
&= c + h\beta_k f_{n+k}.
\end{aligned}
$$

es decir, x_{n+k} es un punto fijo de $F(x) = c + h\beta_k f(t_{n+k}, x)$. Si f es Lipschitz respecto de la segunda variable con constante L, entonces

$$|F(y_2) - F(y_1)| \leq h\beta_k L |y_2 - y_1|.$$

Es decir, para h suficientemente pequeño, es contractiva.

Ejemplos

Suponiendo conocidos x_0 e x_1, definimos x_n, $n \geq 2$ como

$$x_{n+2} = x_n + 2hf(t_{n+1}, x_{n+1}).$$

Es un método de dos pasos explícito con constantes

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -1, & \beta_0 &= 0, \\ \alpha_1 &= 0, & \beta_1 &= 2, \\ \alpha_2 &= 1, & \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplos

Definimos el método implícito de dos pasos

$$x_{n+2} = x_n + \frac{h}{3}\left[f(t_n, x_n) + 4f(t_{n+1}, x_{n+1}) + f(t_{n+2}, x_{n+2})\right],$$

en el que las constantes son

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -1, & \beta_0 &= \tfrac{1}{3}, \\ \alpha_1 &= 0, & \beta_1 &= \tfrac{4}{3}, \\ \alpha_2 &= 1, & \beta_2 &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Métodos de Adams

Los **métodos de Adams** se basan en aproximar la integral de la igualdad

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) = \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, x(t))\, dt$$

mediante la integral de un cierto polinomio de interpolación.

Sea $P(t)$ el polinomio interpolador de $f(t, x(t))$ en t_n, t_{n+1}, ..., t_{n+k-1}. Entonces

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) \approx \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} P(t)\, dt$$

Métodos de Adams-Bashforth

El polinomio $P(t)$ se puede expresar en función de los polinomios de interpolación de Lagrange como

$$P(t) = \sum_{j=0}^{k-1} f(t_{n+j}, x(t_{n+j})) l_j(t),$$

en donde $l_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ son los polinomios de grado $\leq k-1$ que verifican $l_j(t_{n+i}) = \delta_{ij}$. Es decir,

$$l_j(t) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^{k-1} \frac{t - t_{n+s}}{t_{n+j} - t_{n+s}}.$$

Métodos de Adams-Bashforth

Tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) &\approx \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} \sum_{j=0}^{k-1} f(t_{n+j}, x(t_{n+j})) l_j(t)\, dt \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} f(t_{n+j}, x(t_{n+j})) \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} l_j(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, considerando el cambio de variable $g(t) = t_n + sh$, se tiene

$$
\int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} l_j(t)\, dt = h \int_{k-1}^{k} \prod_{\substack{\tau=0 \\ \tau\neq j}}^{k-1} \frac{s-\tau}{j-\tau}\, ds.
$$

Métodos de Adams-Bashforth

Por tanto

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) \approx h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_{n+j}, x(t_{n+j})),$$

$$\beta_j = \int_{k-1}^{k} \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq j}}^{k-1} \frac{t-s}{j-s}\, dt, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Definimos el **método de Adams-Bashforth** de k pasos, como

$$x_{n+k} - x_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j},$$

Métodos de Adams-Moulton

Sea ahora $\bar{P}(t)$ el polinomio interpolador de $f(t, x(t))$ en los puntos t_n, t_{n+1}, …, t_{n+k}.

Razonando análogamente, definimos el **método de Adams-Moulton** de k pasos,

$$x_{n+k} - x_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_j f_{n+j},$$

donde

$$\bar{\beta}_j = \int_{k-1}^{k} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^{k} \frac{t-s}{j-s}\, dt, \qquad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Ejercicios

1. Deducir los siguientes métodos de Adams-Bashforth:

$$k = 1, \qquad x_{n+1} - x_n = hf_n$$

$$k = 2, \qquad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$k = 3, \qquad x_{n+3} - x_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

2. Deducir los siguientes métodos de Adams-Moulton:

$$k = 0, \qquad x_{n+1} - x_n = hf_{n+1}$$

$$k = 1, \qquad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{h}{2}(f_{n+2} + f_{n+1})$$

$$k = 2, \qquad x_{n+3} - x_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1})$$

Definiciones

Dado el método multipaso lineal

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \qquad (\alpha_k = 1,\ |\alpha_0| + |\beta_0| > 0)$$

se define el **error de truncamiento** en el punto (t, h) como

$$\tau(t,h) = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x(t+jh) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f\left(t+jh, x(t+jh)\right) \right].$$

Error de truncamiento

Proposición

Supongamos que la solución $x(t)$ verifica $x(t_n) = x_n$, $x(t_{n+1}) = x_{n+1}, \ldots, x(t_{n+k-1}) = x_{n+k-1}$. Entonces, si el método es explícito,

$$\tau(t_n, h) = \frac{1}{h}\left(x(t_{n+k}) - x_{n+k}\right).$$

Si el método es implícito y f tiene diferencial continua respecto de x, tenemos

$$\tau(t_n, h) = \frac{x(t_{n+k}) - x_{n+k}}{h} - \beta_k f_x(t_{n+k}, \xi)\big(x(t_{n+k}) - x_{n+k}\big),$$

con $\xi = \theta x_{n+k} + (1-\theta)x(t_{n+k})$, $0 < \theta < 1$.

Error de truncamiento

Sean, para $i = 1, \ldots, p$,

$$C_0 = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j, \quad C_i = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^i - \frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{i-1}.$$

Diremos que un método multipaso lineal es de **orden** $p-1$ si

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_{p-1} = 0, \quad C_p \neq 0.$$

Proposición

Un método multipaso lineal es de orden p si y solo si para toda $f \in F_p[a,b]$, todo $t \in [a,b)$ y todo $\eta \in \mathbb{R}$, se verifica que el error de truncamiento es un infinitésimo de orden p.

Error de truncamiento

Corolario

Supongamos que

1. *la solución* $x(t)$ *verifica* $x(t_n) = x_n$, $x(t_{n+1}) = x_{n+1}, \dots,$ $x(t_{n+k-1}) = x_{n+k-1}$
2. *si el método es implícito,* f_x *está acotada en* S.

Se verifica que, si el método es de orden p*, entonces el error global es de orden* $p+1$.

Polinomios de Hermite

Proposición

Sean

$$\begin{aligned} & t_0, t_1, \ldots, t_{k-1} \in \mathbb{R}, \quad t_i \neq t_j \text{ si } i \neq j, \\ & x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}, \\ & x_0', x_1', \ldots, x_{k-1}' \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces existe un único polinomio $P(t)$*, de grado* $\leq 2k-1$*, tal que*

$$\begin{aligned} P(t_i) &= x_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ P'(t_i) &= x_i', \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Polinomios de Hermite

Proposición

Sean

$$\begin{aligned} &t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, \quad t_i \neq t_j \text{ si } i \neq j, \\ &x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}, \\ &x'_0, x'_1, \ldots, x'_{k-1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces existe un único polinomio $P(t)$, de grado $\leq 2k$, tal que

$$\begin{aligned} P(t_i) &= x_i, \qquad & i &= 0, 1, \ldots, k \\ P'(t_i) &= x'_i, \qquad & i &= 0, 1, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Polinomios de Hermite

Proposición

Sean

$$\begin{aligned} & t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, \ \textit{con } t_i < t_{i+1}, \\ & x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}, \\ & x_0', x_1', \ldots, x_k' \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces existe un único polinomio $P(t)$, de grado $\leq 2k$, tal que

$$\begin{aligned} P(t_i) &= x_i, \qquad && i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ P'(t_i) &= x_i', \qquad && i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Polinomios de Hermite

Corolario

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{k-1} \in \mathbb{R}$, *existe un único polinomio* $P(t)$ *de grado* $\leq 2k-1$ *tal que*

$$P(j) = x_j, \qquad P'(j) = x'_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Además,

$$P(t) = \sum_{j=0}^{k-1} x_j L_{j0}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} x'_j L_{j1}(t),$$

en donde L_{j0} *y* L_{j1}, *son polinomios de grado* $\leq 2k-1$ *tales que*

$$\begin{array}{ll} L_{j0}(i) = \delta_{ij}, & L'_{j0}(i) = 0 \\ L_{j1}(i) = 0, & L'_{j1}(i) = \delta_{ij} \end{array} \qquad i, j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Polinomios de Hermite

Corolario

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, $x'_0, x'_1, \ldots, x'_k \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $\bar{P}(t)$ de grado $\leq 2k$ tal que

$$\bar{P}(j) = x_j,\ j = 0, 1, \ldots, k-1,\ \ \bar{P}'(j) = x'_j,\ j = 0, 1, \ldots, k.$$

Además,

$$\bar{P}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} x_j \bar{L}_{j0}(t) + \sum_{j=0}^{k} x'_j \bar{L}_{j1}(t),$$

en donde $\bar{L}_{j0}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, y $\bar{L}_{j1}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, son polinomios de grado $\leq 2k$ tales que

$$\begin{aligned} &\bar{L}_{j0}(i) = \delta_{ij},\ \bar{L}'_{j0}(i) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, k, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1 \\ &\bar{L}_{j1}(i) = 0,\ \bar{L}'_{j1}(i) = \delta_{ij},\ i = 0, 1, \ldots, k, \quad j = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Orden de los métodos multipaso

Lema

El método multipaso $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$, $\alpha_k = 1$, *es de orden al menos* p *(exactamente* p*) si y solo si se verifica la igualdad*

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j H(j) - \sum_{j=0}^{k} \beta_j H'(j) = 0,$$

para todo polinomio $H(t)$ *de grado* $\leq p$ *(y existe un polinomio de grado* $p+1$ *para el que no se verifica esa igualdad).*

Orden de los métodos multipaso

Proposición

i) *Todo método lineal multipaso explícito de k pasos es de orden $\leq 2k-1$.*

ii) *Todo método lineal multipaso implícito de k pasos es de orden $\leq 2k$.*

Proposición

i) *Existe un único método lineal multipaso explícito de k pasos y orden $2k-1$.*

ii) *Existe un único método lineal multipaso implícito de k pasos y orden $2k$.*

Definiciones

Se dice que un método multipaso lineal es **consistente** si es por lo menos de primer orden, es decir, si $C_0 = C_1 = 0$.

Sea $\{x_n^{(N)}\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión definida como solución de

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j}^{(N)} = h_N \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}^{(N)}, x_{n+j}^{(N)}),$$

en donde

$$h_N = \frac{\bar{t} - a}{N}, \quad t_n^{(N)} = a + n h_N, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

siendo los datos iniciales $x_0^{(N)}, x_1^{(N)}, \ldots, x_{k-1}^{(N)}$, tales que

$$\lim_{N\to\infty} x_j^{(N)} = \eta, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Definiciones

Se dice que un método multipaso lineal es **convergente**, si para toda f continua y lipschitziana respecto de la segunda variable, todo $\eta \in \mathbb{R}$ y todo $\bar{t} \in [a, b]$ se verifica

$$\lim_{N\to\infty} x_N^{(N)} = x(\bar{t}),$$

en donde $x(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(a) &= \eta \end{aligned}\right\}$$

Equivalencia

Proposición

Todo método lineal multipaso convergente es consistente.

Condición de la raíz

Dado el método $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$, $(\alpha_k = 1)$, se define el polinomio

$$\rho(t) = t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

Se dice que el método verifica la condición de la raíz (o condición de estabilidad) si para toda raíz λ de $\rho(t)$ se verifica

i) $|\lambda| \leq 1$,

ii) $|\lambda| < 1$, si λ es una raíz múltiple.

Proposición

Todo método lineal multipaso convergente verifica la condición de la raíz.

Condición de la raíz

Teorema

Un método lineal multipaso es convergente si y solo si es consistente y verifica la condición de la raíz.

Teorema (Primera barrera de Dalqvist)

Si un método lineal de k pasos, con $k \geq 2$, es convergente, entonces es de orden $\leq k+2$, si k es par; $\leq k+1$, si k es impar.

Convergencia

Ejercicio

Estudiar la convergencia del método explícito de 3 pasos y orden máximo.

Orden y convergencia de los métodos de Adams

Proposición

Se verifica:

i) *Los métodos de Adams–Bashforth de k pasos son de orden k.*

ii) *Los métodos de Adams–Moulton de k pasos son de orden $k+1$.*

iii) *Los métodos de Adams son convergentes.*

Métodos predictor-corrector

Sean los métodos (explícito e implícito) definidos por

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_{n+j}, x_{n+j}), \quad \alpha_k = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{\alpha}_j x_{n+j} = h \sum_{j=1}^{k} \tilde{\beta}_j f(t_{n+j}, x_{n+j}), \quad \tilde{\alpha}_k = 1.$$

Un **método predictor–corrector** consiste en obtener una aproximación $\tilde{x}_{n+k}$ de $x(t_{n+k})$ usando el método explícito (predictor) y obtener el valor final de x_{n+k} usando el implícito (corrector), mediante

$$x_{n+k} = -\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_j x_{n+j} + h \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\beta}_j f(t_{n+j}, x_{n+j}) + h\tilde{\beta}_k f(t_{n+k}, \tilde{x}_{n+k}).$$

Ejemplo

Calculemos el método predictor–corrector usando Adams–Bashforth de 3 pasos como predictor y Adams–Moulton de 2 pasos como corrector.

Supongamos que tenemos las aproximaciones x_n, x_{n+1}, x_{n+2}. Calculamos la aproximación x_{n+3} como

$$\bar{x}_{n+3} = x_{n+2} + \frac{h}{12}\left(23f(t_{n+2}, x_{n+2}) - 16f(t_{n+1}, x_{n+1}) + 5f(t_n, x_n)\right);$$

Utilizando dicha aproximación, calculamos x_{n+3} como

$$x_{n+3} = x_{n+2} + \frac{h}{12}\left(5f(t_{n+3}, \bar{x}_{n+3}) + 8f(t_{n+2}, x_{n+2}) - f(t_{n+1}, x_{n+1})\right).$$

El paso siguiente es calcular x_{n+4} a partir de x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}.

Orden y convergencia de los métodos predictor corrector de Adams

Como el método de Adams–Bashforth de k pasos es de orden k, el error de truncamiento se puede escribir como

$$h\tau(t_n, h) = C_{k+1} h^{k+1} x^{(k+1)}(t_n) + \mathcal{O}(h^{k+2}).$$

Análogamente, el error de truncamiento de Adams-Moulton de k pasos es de la forma

$$h\tau(t_n, h) = C^*_{k+2} h^{k+2} x^{(k+2)}(t_n) + \mathcal{O}(h^{k+3}),$$

donde hemos denotado con asterisco para distinguirlas.

Orden y convergencia de los métodos predictor corrector de Adams

Si calculamos dichas constantes (ejercicio), obtenemos

k	C_{k+1}	C^*_{k+1}	k	C_{k+1}	C^*_{k+1}
1	1/2	-1/2	3	3/8	-1/24
2	5/12	-1/12	4	251/720	-19/720

Orden y convergencia de los métodos predictor corrector de Adams

Proposición

El método predictor-corrector con el Método de Adams-Bashforth de k pasos como predictor y el Método de Adams-Moulton de $k-1$ pasos como corrector es un método de orden k. Es más, se puede estimar el error cometido como

$$\frac{C^*_{k+1}}{C_{k+1} - C^*_{k+1}} \left(x_{n+k} - \bar{x}_{n+k}\right)$$

Métodos adaptativos

En el ejemplo que vimos, usando Adams–Bashforth de 3 pasos como predictor y Adams–Moulton de 2 pasos como corrector, si $f \in \mathcal{C}^5[a, b]$, se puede estimar el error cometido como

$$e_{n+3} = x(t_{n+3}) - x_{n+3} = \frac{\bar{x}_{n+3} - x_{n+3}}{10} + O(h^5).$$

Métodos adaptativos.
En los métodos adaptativos, se utiliza el error anterior: si el error estimado es mayor que el margen establecido, entonces se disminuye el valor del paso h, mientras que si el error estimado es menor, se aumenta el valor del paso.

Estabilidad relativa

Consideremos el método

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j},$$

que supondremos convergente. Definimos los polinomios

$$\rho(t) = t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$$

$$\sigma(t) = \beta_k t^k + \beta_{k-1} t^{k-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0$$

y

$$H(t) = \rho(t) - \bar{h}\sigma(t).$$

Estabilidad en los métodos multipaso

Sean $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k$ las raíces de $H(t)$ (que supondremos simples). Podemos considerar $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k$ funciones de $\bar{h}$ tales que

$$\bar{r}_1(0) = r_1, \ldots, \bar{r}_k(0) = r_k,$$

donde $r_1, \ldots, r_k$ son las raíces de $\rho(t)$.

Si el método es convergente, tenemos que $C_0 = 0$, o lo que es lo mismo, $r_1 = 1$ es raíz de $\rho(t)$. Además, por verificarse la condición de la raíz, esta raíz es simple.

Estabilidad absoluta

Decimos que un método lineal multipaso convergente es **absolutamente estable** para un cierto $\bar{h}$ si

$$|\bar{r}_j| < 1, \qquad \text{para } j = 1, \dots, k.$$

Se llama **región de estabilidad absoluta** al conjunto de los $\bar{h}$, tal que el método es absolutamente estable.

Estabilidad absoluta

Decimos que el método es **A-estable** si su región de estabilidad absoluta incluye los complejos con parte real ≤ 0.

Teorema (Segunda barrera de Dalqvist)

No existen métodos multipaso explícitos A-estables. Los métodos multipaso implícitos A-estables tienen orden ≤ 2.

Estabilidad relativa

Decimos que un método lineal multipaso convergente es **relativamente estable** para un cierto $\bar{h}$ si

$$|\bar{r}_1| > |\bar{r}_j|, \qquad \text{para } j = 2, \ldots, k.$$

Se llama **región de estabilidad relativa** al conjunto de los $\bar{h}$, tal que el método es relativamente estable.

En el caso real, denominamos **intervalo de estabilidad relativa** al mayor intervalo (α, β) con $\alpha \leq 0 \leq b$ tal que el método es relativamente estable para todo $\bar{h} \in (\alpha, \beta)$.