Ecuaciones de segundo orden
Introducción
Métodos de tiro
Método de las diferencias finitas
Ecuaciones en derivadas parciales
Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos
Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos
Problema de Dirichlet

Resolución numérica de ecuaciones diferenciales - problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Índice

1 Ecuaciones de segundo orden
- Introducción
- Métodos de tiro
- Método de las diferencias finitas

2 Ecuaciones en derivadas parciales
- Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos
- Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos
- Problema de Dirichlet

Problema de valores en la frontera

Dados, $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, en $\mathcal{C}^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2)$, y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, consideremos el problema de encontrar una función $u(t)$, de clase 2 en $[t_0, t_1]$ tal que

$$
\begin{aligned}
&u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \qquad \text{si} \quad t_0 < t < t_1, \\
&u(t_0) = c_0, \quad u(t_1) = c_1.
\end{aligned}
$$

Nótese que sin pérdida de generalidad (mediante cambios de coordenadas lineales), podemos considerar $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y $c_1 = c_2 = 0$.

En general el problema anterior puede no tener solución o no tener una única solución.

Métodos de tiro

Consideremos el problema de valor inicial

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \qquad \text{si} \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = 0, u'(0) = x.$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad, el problema anterior tiene solución única para cada valor de $x \in \mathbb{R}$. Sea $u(t, x)$ dicha solución y denotemos

$$\phi(x) := u(1, x).$$

Entonces el problema de valores frontera es equivalente a encontrar un cero de la función ϕ.

Problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Ecuaciones de segundo orden

Introducción

Métodos de tiro

Método de las diferencias finitas

Ecuaciones en derivadas parciales

Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos

Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos

Problema de Dirichlet

Ejemplo

Aplicando el método de la secante, encontrar la solución del problema de valores frontera

$$-u''(t) + u(t) = t \qquad \text{si} \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0.$$

Diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales

Teorema (Diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales)

Supongamos que $f(t,x)$ y $f_x(t,x)$ están definidas y son continuas en $S \subset [t_0-\delta, t_0+\delta] \times \mathbb{R}^n$.

Dado $(t_0,x_0) \in S$, denotemos $x(t;t_0,x_0)$ la solución (maximal) que determinada por las condiciones iniciales $x(t_0;t_0,x_0)=x_0$, y sea W el dominio de $(t,t_0,x_0) \to x(t,t_0,x_0)$.

Entonces $x\colon W \to \mathbb{R}$ es de clase 1 respecto de t_0 y x_0.

Diferencias finitas

Para $N \in \mathbb{N}$ definimos

$$h = \frac{1}{N+1}, \qquad t_j = jh, \quad j = 0, \cdots, N+1.$$

lo que nos da una partición del intervalo $[0, 1]$ en $N + 1$ trozos, siendo $t_0 = 0$ y $t_{N+1} = 1$.

En el método de las **diferencias finitas**, aproximaremos el valor de u en los puntos $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$.

Para ello, sustituiremos u'' por una aproximación numérica en términos de los valores de u y pediremos que los valores aproximados $u_0, \ldots, u_{N+1}$ verifiquen el sistema de ecuaciones correspondiente.

Problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Ecuaciones de segundo orden
Introducción
Métodos de tiro
Método de las diferencias finitas

Ecuaciones en derivadas parciales
Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos
Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos
Problema de Dirichlet

Proposición

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^3([0,1])$. Entonces, existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$u'(t) = \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h} - h^2 \frac{u'''(\xi)}{6}$$

Proposición

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$. Entonces, existe $\tau \in (0,1)$ tal que

$$u''(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} - h^2 \frac{u^{(4)}(\tau)}{12}.$$

Diferencias finitas

Aproximaremos la solución de $u'' = f(t,u,u')$, $u(t_j)$, $j = 1,\cdots,N$, por u_j, $j = 1,\cdots,N$, tales que

$$\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} = f\left(t_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}\right), \quad j = 1,\cdots,N,$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Este problema se denomina **problema aproximado** o **problema discreto** y al problema original, **problema continuo**.

Problema de valores en la frontera
Ecuación de prueba

Dada una función f continua en el intervalo $[0,1]$, consideremos el problema de valores en la frontera

$$-u''(t) = f(t) \qquad \text{si} \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

El problema anterior tiene solución única,

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\, ds,$$

donde $G(t,s)$ es la función de Green

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t) & \text{si } 0 \le s \le t \le 1, \\ t(1-s) & \text{si } 0 \le t < s \le 1, \end{cases}$$

Diferencias finitas

Problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Ecuaciones de segundo orden

Introducción

Métodos de tiro

Método de las diferencias finitas

Ecuaciones en derivadas parciales

Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos

Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos

Problema de Dirichlet

En el caso anterior, tenemos que el método de las diferencias finitas es

$$\frac{-u_{j-1}+2u_j-u_{j+1}}{h^2}=f(t_j), \qquad j=1,\cdots,N,$$

$$u_0=u_{N+1}=0,$$

Diferencias finitas

Si U es el vector de coordenadas $u_1, \cdots, u_N$, F el vector de coordenadas $f(t_1), \ldots, f(t_N)$ y

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces el problema discreto es equivalente a encontrar un vector U tal que

$$AU = F. \tag{1}$$

Diferencias finitas

Problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Ecuaciones de segundo orden

Introducción

Métodos de tiro

Método de las diferencias finitas

Ecuaciones en derivadas parciales

Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos

Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos

Problema de Dirichlet

Lema

Si $\alpha_1 \geq 2, \ldots, \alpha_n \geq 2$, *entonces la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & & & \\ -1 & \alpha_2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

Convergencia

Lemma

Sea $U = (u_1, \dots, u_N)$ solución de $AU = F$. Entonces

$$u_j = h \sum_{k=1}^{N} G(t_j, t_k) f(t_k).$$

Teorema

Si la solución $u(t)$ del problema continuo es de clase 4, entonces existe una constante $C \geq 0$, independiente de N tal que

$$\max_{1 \leq j \leq N} |u(t_j) - u_j| \leq Ch^2.$$

Diferencias finitas

Vamos a utilizar una idea similar para aproximar las soluciones de una ecuación diferencial de tipo parabólico.

Partimos de la ecuación del calor en una barra de longitud uno,

$$\begin{cases} u_{xx}(t,x) = u_t(t,x), & (t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1) \\ u(0,x) = g(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ u(t,0) = a(t), & (t \geq 0) \\ u(t,1) = b(t), & (t \geq 0) \end{cases}$$

donde $u(t,x)$ es la temperatura del punto x en el instante t, $g(x)$ describe la temperatura inicial de cada punto y a, b son las temperaturas de los extremos.

Problema discreto

Problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Ecuaciones de segundo orden
Introducción
Métodos de tiro
Método de las diferencias finitas

Ecuaciones en derivadas parciales
Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos
Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos
Problema de Dirichlet

Comenzamos discretizando el dominio de u. Para ello, fijamos $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$, definimos $h = 1/(n+1)$ y tomamos

$$
\begin{aligned}
t_j &= jk, \quad j = 0, 1, \dots, \\
x_i &= ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

A continuación, elegimos aproximaciones de las derivadas en los puntos de la malla. En este caso, tomamos

$$
\begin{aligned}
u_t(t, x) &\approx \frac{u(t+k, x) - u(t, x)}{k}, \\
u_{xx}(t, x) &\approx \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2}.
\end{aligned}
$$

Problema discreto

Planteamos ahora una aproximación discreta del problema original. Para ello, denotamos $u_{j,i}$ a la aproximación de $u(t_j, x_i)$. Entonces

$$\begin{aligned} u_{0,i} &= f(x_i), \quad 0 \le i \le n+1, \\ u_{j,0} &= a(t_j), \quad u_{j,n} = b(t_j), \quad j = 0, 1 \dots . \end{aligned}$$

y en el resto de puntos, imponemos que se verifique

$$\frac{u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}}{h^2} = \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{k}, \quad 1 \le i \le n, \ j \ge 1.$$

Problema discreto

Despejando $u_{j+1,i}$ de la última ecuación, obtenemos

$$u_{j+1,i} = su_{j,i+1} + (1-2s)u_{j,i} + su_{j,i-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \ j \geq 1,$$

donde $s = k/h^2$.

Es decir, conocidos $u_{j,i}$, $0 \leq i \leq n$, podemos utilizar la ecuación anterior para obtener $u_{j+1,i}$, $1 \leq i \leq n-1$. Por esto se denomina **método explícito**.

Estabilidad

El proceso anterior puede verse como un sistema dinámico discreto. Si las condiciones frontera son cero, partiendo de los valores en $t = 0$, en cada paso multiplicamos por la matriz tridiagonal B,

$$B = \begin{pmatrix} 1-2s & s & & & \\ s & 1-2s & s & & \\ & s & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s \\ & & & s & 1-2s \end{pmatrix}$$

Como en estas condiciones, la solución de la EDP tiende a cero, para que el método converja a la misma solución, la sucesión $B^k u$ debe converger a cero. Es decir, el radio espectral de B debe ser menor que 1.

Estabilidad

Lema

Los autovalores de la matriz B son

$$1-2s(1-\cos\theta_j),\quad \theta_j=\frac{j\pi}{n+1},\ (1\le j\le n).$$

Como consecuencia, para que el método sea estable es condición suficiente que $s \le 1/2$, es decir, $2k \le h^2$.

Ecuación del calor

Problemas de valores en la frontera

José Luis Bravo

Ecuaciones de segundo orden
- Introducción
- Métodos de tiro
- Método de las diferencias finitas

Ecuaciones en derivadas parciales
- Ecuaciones parabólicas. Métodos explícitos
- **Ecuaciones parabólicas. Métodos implícitos**
- Problema de Dirichlet

Recordemos que queremos aproximar las soluciones de una ecuación diferencial de tipo parabólico.

Partimos de la ecuación del calor en una barra de longitud uno,

$$\begin{cases} u_{xx}(t,x) = u_t(t,x), & (t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1) \\ u(0,x) = g(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ u(t,0) = a(t), & (t \geq 0) \\ u(t,1) = b(t), & (t \geq 0) \end{cases}$$

donde $u(t,x)$ es la temperatura del punto x en el instante t, $g(x)$ describe la temperatura inicial de cada punto y a, b son las temperaturas de los extremos.

Problema discreto

Consideremos ahora una aproximación discreta de la forma

$$\frac{u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}}{h^2} = \frac{u_{j,i} - u_{j-1,i}}{k}, \quad 1 \leq i \leq n,\ j \geq 1,$$

y en el resto de los puntos, los valores dados por las condiciones en la frontera,

$$\begin{aligned} u_{0,i} &= f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n, \\ u_{j,0} &= a(t_j), \quad u_{j,n+1} = b(t_j), \quad j = 0, 1 \ldots. \end{aligned}$$

Problema discreto

Conocidos los valores de la aproximación en el nivel $j-1$ de la malla, tenemos que los valores en el nivel j vienen dados por las soluciones al sistema lineal

$$-su_{j,i+1} + (1+2s)u_{j,i} - su_{j,i-1} = u_{j-1,i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde $s = k/h^2$.

Es decir, los valores de $u_{j,i}$ se obtienen resolviendo el sistema anterior. Por esto se denomina **método implícito**.

Estabilidad

Si las condiciones frontera son $a(t) = b(t) = 0$, definimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+2s & -s & & & \\ -s & 1+2s & -s & & \\ & -s & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -s \\ & & & -s & 1+2s \end{pmatrix}$$

y v_j denota el vector $(u_{1j}, \ldots, u_{nj})$, entonces se verifica

$$Av_j = v_{j-1}.$$

Estabilidad

Tenemos que

$$v_j = A^{-1} v_{j-1}.$$

El sistema será estable si $v_j \to 0$, es decir,

$$v_j = A^{-1} v_{j-1} = \ldots = A^{-j} v_0 \to 0,$$

o, equivalentemente, $\rho(A^{-1}) < 1$.

Estabilidad

Lema

Los autovalores de la matriz A son

$$1 + 2s(1 - \cos\theta_j), \quad \theta_j = \frac{j\pi}{n+1}, \ (1 \le j \le n).$$

Como consecuencia, los autovalores de A^{-1} están entre 0 y 1 y el método implícito siempre es convergente.

Orden del método explícito

Consideremos $u_{i,j}$ las aproximaciones al problema de valores en la frontera de la ecuación del calor definidas por

$$u_{0,i} = f(x_i), \quad u_{j,0} = a(t_j), \quad u_{j,n} = b(t_j),$$
$$u_{j,i} = s u_{j-1,i+1} + (1-2s) u_{j-1,i} + s u_{j-1,i-1},$$

con $s = k/h^2 < 1/2$.

Proposición

Sea $u(t,x)$ la solución del problema de valores en la frontera para $t \in [0,T]$. Se verifica que

$$u(t_j, x_i) = u_{j,i} + \mathcal{O}(h^2), \quad t_j \in [0,T], \; x_i \in [0,1].$$

Método de Crank-Nicolson

Combinando los dos métodos anteriores, podemos definir las aproximaciones mediante las ecuaciones

$$-su_{j,i-1}+(2+2s)u_{j,i}-su_{j,i+1} = su_{j-1,i-1}+(2-2s)u_{j-1,i}+su_{j-1,i+1}$$

con las mismas condiciones en los puntos frontera.

Nótese que podemos obtener los valores en el nivel j a partir de los valores en el nivel $j-1$ resolviendo un sistema lineal.

Se demuestra que el método de Crank-Nicolson es estable y el orden del error es

$$u(t_j, x_i) = u_{j,i} + \mathcal{O}(k^2, h^2).$$

Problema de Dirichlet

Consideremos la ecuación de Laplace en un cuadrado,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u(x,0) = a(x), \quad u(x,1) = b(x), \\ u(0,y) = c(y), \quad u(1,y) = d(y). \end{cases}$$

Consideremos la discretización definida por $h = 1/(n+1)$,

$$(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad 0 \leq i, j \leq n+1.$$

Y la aproximación

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Diferencias finitas

Con la discretización anterior, definimos las aproximaciones a la solución del problema de Dirichlet mediante diferencias finitas, $u_{i,j} \approx u(t_i, t_j)$, donde $u_{i,j}$ está determinado por

$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = 0, \quad 1 \leq i,j \leq n,$$

$$u_{i,0} = a(x_i), \quad u_{i,n+1} = b(x_i), \quad u_{0,j} = c(y_i), \quad u_{n+1,j} = d(y_i).$$