

Introducción a la investigación en Matemática Aplicada

Contents

Chapter 1. MUII (parte mía)	5
1. Sistemas gradiente y hamiltonianos	5
2. Teoría hiperbólica	7
3. Sistemas diferenciales planos	18
4. Ecuaciones de Abel	25
Bibliography	39

CHAPTER 1

MUII (parte mía)

1. Sistemas gradiente y hamiltonianos

En esta sección veremos dos tipos particulares de sistemas de ecuaciones diferenciales, los sistemas gradiente y los sistemas hamiltonianos. Seguiremos el libro de Perko [15].

1.1. Sistemas gradiente. Sea E un subconjunto abierto de R^n y sea $V \in C^2(E)$. Denominamos sistema gradiente de V al sistema

$$\dot{x} = -\text{grad } V(x),$$

donde

$$\text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T.$$

Nótese que los puntos críticos o puntos de equilibrio del sistema gradiente son los puntos críticos de la función V , es decir, los puntos x tales que $\text{grad } V(x) = 0$.

Sea x_0 un punto regular y $V(x_0) = c$. Entonces el campo del sistema gradiente es perpendicular en x_0 a la hipersuperficie de nivel $V(x) = c$. Para ello, primero podemos probar que tenemos una hipersuperficie aplicando el Teorema de la función implícita utilizando como variable x_i tal que $(\partial V / \partial x_i)(x_0) \neq 0$. Considerando cualquier curva $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$ contenida en dicha variedad y derivando respecto del tiempo en $V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = c$, obtenemos que el campo es ortogonal a el vector director de la curva (es decir, que el campo es ortonormal a la superficie de nivel).

Si x_0 es un punto crítico correspondiente a un mínimo local estricto de la función V , entonces la función $V(x) - V(x_0)$ es una función de Liapunov estricta (ejercicio). Por tanto tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1.1. *En los puntos regulares de la función V , las trayectorias de las soluciones del sistema gradiente son ortogonales a las superficies de nivel de V .*

Además, los mínimos locales estrictos de la función V son puntos de equilibrio asintóticamente estables.

Por otro lado, la matriz de la linealización del campo en un punto crítico x_0 es

$$A = \left[\frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}.$$

Como la matriz A es simétrica, todos sus autovalores son reales. Además, si A es no singular, es diagonalizable con respecto a una base ortonormal (Teorema de Schur). Entonces, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1.2. *Todo punto crítico no degenerado de un sistema plano gradiente analítico es una silla o un nodo. Es más, es un nodo si y sólo si el punto crítico es un extremo relativo y en caso contrario es una silla.*

EJEMPLO 1.3. *Sea $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$. Calcular los puntos críticos del sistema, dibujar las curvas de nivel de V , el campo y algunas órbitas.*

Ejercicios del libro de Perko.

1.2. Sistemas hamiltonianos. Sea E un abierto de \mathbb{R}^{2n} y $H \in \mathcal{C}^2(E)$. Denotemos los puntos de \mathbb{R}^{2n} como (x, y) donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. El sistema Hamiltoniano de n -grados de libertad asociado a H es

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

donde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T.$$

La función H se denomina función hamiltoniana o energía total del sistema.

TEOREMA 1.4. *La energía total del sistema hamiltoniano es constante a lo largo de las trayectorias.*

PROOF. Basta derivar. □

Consideremos el sistema en el plano y que el origen es un punto crítico.

TEOREMA 1.5. *El linealizado de todo punto crítico no degenerado de un sistema hamiltoniano plano es un centro o un punto de silla. (Veremos que lo mismo ocurre con el no linealizado).*

PROOF. La traza de la matriz Jacobiana del sistema (matriz Hessiana de H) es cero. Entonces los autovalores son o reales de signo opuesto o imaginarios puros. □

Consideremos ahora sistemas de la forma (sistemas conservativos o sistema newtoniano)

$$\ddot{x} = f(x),$$

donde f es de clase 1. Podemos escribirlo como un sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x).$$

Este sistema es hamiltoniano, con función hamiltoniana $H(x, y) = T(y) + U(x)$, donde $T(y) = y^2/2$ (energía cinética) y

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds,$$

es la energía potencial. Además se verifica el siguiente resultado.

TEOREMA 1.6. *Los puntos críticos del sistema están en el eje x .*

Un punto $(x_0, 0)$ es punto crítico de la función si y sólo si es punto crítico de U .

Si $(x_0, 0)$ es un extremo estricto de U , entonces es un centro si es un mínimo y un punto de silla si es un máximo. Es más, si es un punto de inflexión, entonces es una cúspide.

Finalmente, el retrato de fases es simétrico respecto del eje x .

EJEMPLO 1.7. Consideremos el péndulo no forzado:

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Tenemos el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x,$$

con función de energía potencial

$$U(x) = \int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x.$$

Ejercicios del libro de Perko.

Dado un sistema plano

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

se define el sistema ortogonal como

$$\dot{x} = Q(x, y), \quad \dot{y} = -P(x, y).$$

TEOREMA 1.8. *El sistema plano es un sistema hamiltoniano si y sólo si el sistema ortogonal es un sistema gradiente.*

1.3. Integral primera. Decimos que una función F es una integral primera del sistema $\dot{x} = f(x)$ si F es constante a lo largo de cada trayectorial.

EJEMPLO 1.9. Consideremos el sistema depredador presa de Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2,$$

con a_1, a_2, a_3, a_4 positivos. Entonces una integral primera en el primer cuadrante es

$$F(x_1, x_2) = a_1 \ln x_2 - a_2 x_2 + a_3 \ln x_1 - a_4 x_1.$$

En un sistema plano, denominamos factor integrante a una función R tal que el campo multiplicado por R es un campo hamiltoniano.

2. Teoría hiperbólica

En esta sección consideraremos un sistema autónomo $x' = f(x)$ y trataremos de describir el comportamiento local alrededor de un punto p de las soluciones a partir de la linealización del campo $x' = f(p) + Df(p)x$.

Veremos que si en un punto el campo es no singular (la linealización no es homogénea, i.e. $f(p) \neq 0$) entonces las soluciones en un entorno se “comportan como rectas paralelas”. Si el punto es singular y los autovalores de Df tienen parte real no nula, entonces las soluciones en un entorno tendrán un “comportamiento análogo al del linealizado”, mientras que si tenemos autovalores con parte real nula, sólo tendremos algunos resultados parciales.

Para poder expresar los resultados con propiedad, necesitamos definir qué queremos decir con que las soluciones se “comportan” de cierta forma.

Dadas $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$ y $g \in \text{Lip}_{\text{loc}}(V)$, donde U, V son abiertos de \mathbb{R}^n , decimos que $x' = f(x)$ es *topológicamente equivalente* a $x' = g(x)$ si existe un homeomorfismo $h: U \rightarrow V$ y una aplicación $\tau(t, x)$ de clase 1 tal que $\tau_t(t, x) > 0$ tal que

$$(1) \quad h(u(t, x)) = v(\tau(t, x), h(x)), \quad (x \in U, t \in I_x),$$

donde $u(t, x)$ (resp. $v(t, x)$) es la solución (maximal) del PVI $x' = f(x)$, $x(0) = x$ (resp. $x' = g(x)$, $x(0) = x$) e I_x es su intervalo de definición. Es decir, si existe un homeomorfismo $h: U \rightarrow V$ que envía las órbitas de $x' = f(x)$ a las órbitas de $x' = g(x)$.

TEOREMA 2.1 (Teorema de Existencia Global). *El sistema $x' = f(x)$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es topológicamente equivalente al sistema*

$$(2) \quad x' = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}.$$

Además el dominio de definición de las soluciones de este segundo sistema es \mathbb{R} .

PROOF. Sea $h(x) = x$. Dada una solución $u(t, x)$, definimos

$$\tau(t) = \int_0^t (1 + |f(u(s, x))|) ds.$$

La función $\tau(t)$ es invertible. Sea $t(\tau)$ su inversa. Entonces si consideramos $u(t(\tau))$, tenemos

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du/dt}{d\tau/dt} = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}.$$

Es decir, es solución del PVI (2) y $u(0, x) = x$, luego

$$h(u(t(\tau), x)) = v(\tau, h(x)).$$

Tomando inversas,

$$h(u(t, x)) = v(\tau(t), h(x)).$$

Para probar que el intervalo de definición de las soluciones de (2) es todo \mathbb{R} basta considerar que si τ está acotado, entonces (pasando a la forma integral)

$$|v(\tau, x_0)| \leq |x_0| + |\tau|.$$

Usando la prolongación de soluciones, obtenemos que están definidas para todo $\tau \in \mathbb{R}$. □

Dadas $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$ y $g \in \text{Lip}_{\text{loc}}(V)$, donde U, V son abiertos de \mathbb{R}^n , decimos que $x' = f(x)$ es *topológicamente conjugado* a $x' = g(x)$ si existe un homeomorfismo $h: U \rightarrow V$ tal que

$$(3) \quad h(u(t, x)) = v(t, h(x)), \quad (x \in U, t \in I_x),$$

donde $u(t, x)$ (resp. $v(t, x)$) es la solución (maximal) del PVI $x' = f(x)$, $x(0) = x$ (resp. $x' = g(x)$, $x(0) = x$) e I_x es su intervalo de definición. Es decir, si existe un homeomorfismo $h: U \rightarrow V$ que envía las órbitas de $x' = f(x)$ a las órbitas de $x' = g(x)$ respetando la parametrización del tiempo.

Si h es un homeomorfismo, decimos que es una conjugación topológica, si h es un difeomorfismo de clase C^r , decimos que es una conjugación de clase C^r , etc.

PROPOSICIÓN 2.2. Sean $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$ y $g \in \text{Lip}_{\text{loc}}(V)$, donde U, V son abiertos de \mathbb{R}^n y sea $h: U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^r , con $r \geq 1$. Entonces h es una conjugación entre $x' = f(x)$ y $x' = g(x)$ si y sólo si

$$(4) \quad Dh_p f(p) = g(h(p)), \quad \text{para todo } p \in U.$$

PROOF. Sea $u(t, x)$ (resp. $v(t, x)$) es la solución (maximal) del PVI $x' = f(x)$, $x(0) = x$ (resp. $x' = g(x)$, $x(0) = x$).

Si $x' = f(x)$ y $x' = g(x)$ son conjugados, entonces derivando en (3) respecto de t y evaluando en $t = 0$, tenemos (4).

Recíprocamente, supongamos que se verifica (4). Para ver que son conjugados, necesitamos probar que $\phi(t) = h(u(t, x))$ es solución de $x' = g(x)$ (nótese que si es solución, entonces por la unicidad, $h(u(t, x)) = v(t, h(x))$, pues las dos soluciones coinciden en $t = 0$). Derivando $\phi(t)$ respecto de t , tenemos

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= Dh(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = Dh(u(t, x)) f(u(t, x)) \\ &= g(h(u(t, x))) = g(\phi(t)). \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.3. Los sistemas $(x', y') = (x, -y)$ y $(x', y') = (x, -y + x^3)$ son conjugados con $h(x, y) = (x, y + x^3/4)$.

2.1. Secciones transversales. Sea $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n .

Una aplicación $S: D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$, con D abierto de \mathbb{R}^{n-1} , se denomina *sección transversal local* a f si para todo $a \in D$, $f(S(a))$ no pertenece al espacio tangente de la variedad $S(D)$ en el punto $S(a)$ (es decir, $DS(a)v$ y $f(S(a))$ son linealmente independientes para todo $v \in \mathbb{R}^{n-1}$).

Si además $S: D \rightarrow \Sigma = S(D)$ es un homeomorfismo, entonces S se denomina *sección transversal* (a f).

PROPOSICIÓN 2.4. Si $x_0 \in U$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces f posee una sección transversal $S: D \rightarrow U$ tal que $x_0 \in S(D)$.

PROOF. Sea H el hiperplano ortogonal a $f(x_0)$. Existe una aplicación lineal inyectiva, $L: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $L(\mathbb{R}^{n-1}) = H$. Tomemos $S(q) = x_0 + Lq$ para todo $q \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Consideremos la aplicación continua

$$q \in \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \langle f(S(q)), f(x_0) \rangle \in \mathbb{R},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar ordinario en \mathbb{R}^n .

Como $\langle f(S(0)), f(x_0) \rangle = \langle f(x_0), f(x_0) \rangle > 0$, existe un abierto (conexo) $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, con $0 \in D$, tal que $\langle f(S(q)), f(x_0) \rangle > 0$ para todo $q \in D$. Por tanto $f(S(q)) \notin H$ para todo $q \in D$ (H es espacio tangente de S en cualquier punto), y por ser S lineal e inyectiva, D es homeomorfo a $S(D)$, luego $S: D \rightarrow U$ es una sección transversal a f . □

2.2. Teorema del Flujo Tubular. Sea $f \in C^r(U)$, U abierto de \mathbb{R}^n , sea $p \in U$ tal que $f(p) \neq 0$ y $S: D \rightarrow U$, D abierto de \mathbb{R}^{n-1} , $0 \in D$, una sección transversal a f tal que $S(0) = p$. Denotemos $\Sigma = S(D)$.

TEOREMA 2.5 (Teorema del flujo tubular [14]). *Existe un entorno V de p en U y un difeomorfismo $h: V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de clase \mathcal{C}^r , donde $\epsilon > 0$ y B es una bola abierta de \mathbb{R}^{n-1} centrada en el origen, tal que*

- $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$.
- h es una conjugación (de clase \mathcal{C}^r) entre $x' = f(x)$ restringido a V y el campo constante $x' = (1, 0, \dots, 0)$ definido en $(-\epsilon, \epsilon) \times B$.

PROOF. Sea $F: \Omega_A = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times D : t \in I_{S(y)}\} \rightarrow U$ definida por

$$F(t, y) = u(t, S(y)),$$

donde $u(t, x)$ es la solución (maximal) del PVI $x' = f(x)$, determinada por la condición inicial $u(0, x) = x$ e I_x su intervalo de definición.

Probaremos que F es un difeomorfismo local en 0. Por el Teorema de la Función Inversa, basta probar que $DF(0)$ es un isomorfismo. Si denotamos $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ Tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, S(0)) = f(S(0)) = f(p), \quad \frac{\partial F}{\partial y_i}(0) = \frac{\partial S}{\partial y_i}(0), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Por ser S una sección transversal, los vectores anteriores son linealmente independientes, luego DF es un isomorfismo.

Por el Teorema de la Función Inversa, existe $\epsilon > 0$ y un entorno B de 0 tal que $F: (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow V = F((-\epsilon, \epsilon) \times B)$ es un difeomorfismo. Sea h su inversa.

Como $F(0, y) = y$, $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$. Veamos que h es una conjugación entre $x' = f(x)$ restringido a V y el campo constante $x' = (1, 0, \dots, 0)$ definido en $(-\epsilon, \epsilon) \times B$. (Es equivalente ver que h^{-1} es una conjugación entre los dos sistemas considerados en el orden opuesto.) Para todo $(t, y) \in h(V)$, tenemos

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, y)(1, 0, \dots, 0) &= DF(t, y)(1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) \\ &= f(u(t, S(y))) = f(F(t, y)) \\ &= f(h^{-1}(t, y)). \end{aligned}$$

□

2.3. Teorema de la variedad estable. Sea $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathcal{U})$, donde \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^n . Decimos que un conjunto $C \subset \mathcal{U}$ es *positivamente invariante* (por el flujo de $x' = f(x)$) si para todo $a \in C$, la solución $x(t)$ de $x' = f(x)$ determinada por la condición inicial $x(0) = a$ verifica

$$x(t) \in C \quad \forall t \geq 0.$$

Análogamente se define *negativamente invariante*. Se dice que es *invariante* si es positiva y negativamente invariante.

EJEMPLO 2.6. *Las regiones $x^2 + y^2 < 1$, $x^2 + y^2 = 1$ son invariantes en la ecuación diferencial*

$$x' = -y + (x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x + (x^2 + y^2 - 1).$$

Decimos que un punto de equilibrio $x_0 \in U$ es un punto *hiperbólico* de $x' = f(x)$ si $Df(x_0)$ no tiene autovalores con parte real nula. Denotaremos E^S (E^U) al subespacio invariante asociado a los autovalores con parte real

negativa (positiva). Recordemos que $\mathbb{R}^n = E^S \oplus E^U$ (Teorema 4.15 en los apuntes de Manolo).

TEOREMA 2.7 (Teorema de la variedad estable [15]). *Sea x_0 un punto hiperbólico de $x' = f(x)$ y supongamos que $f \in C^1(\mathcal{D})$, donde \mathcal{D} es un entorno de x_0 . Entonces existen variedades S, U , tangentes en x_0 a los subespacios estables e inestables de $x' = Df(x_0)(x - x_0)$ tales que*

- (1) *La dimensión de S (resp. U) y E^S (resp. E^U) coinciden.*
- (2) *S es positivamente invariante y*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(p) = x_0, \quad p \in S.$$

- (3) *U es negativamente invariante y*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(p) = x_0, \quad p \in U.$$

PROOF. Por simplicidad supondremos $x_0 = 0$ y escribimos la ecuación en la forma

$$x' = Ax + F(x),$$

donde $F(x_0) = 0$ y $DF(x_0) = 0$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0|, |y - x_0| < \delta$, entonces

$$|F(x) - F(y)| \leq \epsilon|x - y|.$$

Nótese que mediante un cambio lineal de variables, podemos suponer que

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

donde los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de la matriz P tienen parte real negativa y los autovalores $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ de la matriz Q tienen parte real positiva.

Vamos a elegir $\alpha > 0$ tal que

$$(5) \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) < -\alpha < 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Definimos las funciones:

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{pmatrix}.$$

Nótese que $U' = AU$, $V' = AV$ y

$$e^{At} = U(t) + V(t).$$

Es sencillo probar que si α es el elegido en (5), entonces existen $K, \sigma > 0$, tales que

$$\|U(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

$$\|V(t)\| \leq Ke^{\sigma t}, \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Consideremos ahora la ecuación integral

$$(6) \quad u(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)F(u(s, a)) ds - \int_t^\infty V(t-s)F(u(s, a)) ds.$$

Si $u(t, a)$ es una solución de (6), entonces es una solución de la ecuación diferencial $x' = f(x)$.

Vamos a resolver la ecuación por aproximaciones sucesivas (punto fijo). Tomamos

$$u^{(0)}(t, a) = 0,$$

$$u^{(j+1)}(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)F(u^{(j)}(s, a)) ds - \int_t^\infty V(t-s)F(u^{(j)}(s, a)) ds.$$

Vamos a probar por inducción que

$$|u^{(j)}(t, a) - u^{(j-1)}(t, a)| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots \text{ y } t \geq 0.$$

Claramente se verifica para $j = 1$.

Asumiendo que se verifica para todos los $j \leq m$, tenemos

$$\begin{aligned} |u^{(m+1)}(t, a) - u^{(m)}(t, a)| &\leq \int_0^t \|U(t-s)\| \epsilon |u^{(m)}(s, a) - u^{(m-1)}(s, a)| ds \\ &\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \epsilon |u^{(m)}(s, a) - u^{(m-1)}(s, a)| ds \\ &\leq \epsilon \int_0^t K e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} ds \\ &\quad + \epsilon \int_t^\infty K e^{\sigma(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} ds \\ &\leq \epsilon \frac{K^2|a|e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{m-1}} + \epsilon \frac{K^2|a|e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{m-1}} \\ &< \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} = \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^m}, \end{aligned}$$

En la última desigualdad, hemos tomado $\epsilon K/\sigma < 1/4$, es decir, $\epsilon < \sigma/4K$. Por otro lado, para la primera desigualdad necesitamos que $|u^{(j)}(t, a)| < \delta$ para todo $j \leq m$. Para ello, es suficiente probar que $|u^{(j)}(t, a) - u^{(j-1)}(t, a)| < \delta/2^j$, pero basta tomar $K|a| < \delta/2$, es decir, $|a| < \delta/2K$.

Entonces, para todo $n > m > N$ y $t \geq 0$,

$$|u^{(n)}(t, a) - u^{(m)}(t, a)| \leq \sum_{j=N}^{\infty} |u^{(j+1)}(t, a) - u^{(j)}(t, a)| \leq \frac{K|a|}{2^{N-1}}.$$

Por tanto, $\{u^{(j)}(t, a)\}$ es una sucesión de Cauchy de funciones continuas, luego

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u^{(j)}(t, a) = u(t, a),$$

uniformemente para todo $t \geq 0$, $|a| < \delta/2K$. La función $u(t, a)$ es solución de la ecuación integral y por tanto, de la ecuación diferencial. Es más,

$$|u(t, a)| \leq 2K|a|e^{-\alpha t},$$

para $t \geq 0$ y $|a| < \delta/2K$.

Si denotamos $a = (a_1, \dots, a_n)$ y denotamos a la solución $u(t, a)$ como $(u_1(t, a), \dots, u_n(t, a))$, entonces la condición inicial que verifica es:

$$u_j(0, a) = a_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$u_j(0, a) = - \int_0^\infty V(-s)F(u(s, a)) ds|_j, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Además, nótese que en el cálculo de la sucesión no se utilizan a_{k+1}, \dots, a_n , por lo que podemos asumir que son cero. Definimos la variedad

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j = u_j(0, y), |(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)| < \delta/2K\}$$

que nos define una variedad k -dimensional.

Si $x(t)$ es una solución de $x' = f(x)$ tal que $x(0) \in S$, entonces $x(t) = u(t, x(0))$ por la unicidad de soluciones. Por la acotación anterior, si $a \in S$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, a) = 0.$$

Por otra parte, si $x(t, a)$ es una solución y $a \notin S$, entonces $x(t, a) \not\rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ (Ver [7, p. 332]). De aquí, tenemos que si $a \in S$, entonces $u(t, a) \in S$.

Además, se verifica (Ver [7, p. 333]) que

$$\frac{\partial u_j(0, y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)}{\partial y_j} = 0, \quad k+1 \leq j \leq n,$$

de donde obtenemos que S y E^S son tangentes.

Para la variedad inestable es el mismo proceso con el cambio de variable $t \rightarrow -t$.

□

EJEMPLO 2.8. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$x' = -x - y^2, \quad y' = y + x^2.$$

Vamos a hacer tres pasos de las aproximaciones sucesivas para aproximar la variedad estable.

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos la solución de la ecuación integral

$$u(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)F(u(s, a)) ds - \int_t^\infty V(t-s)F(u(s, a)) ds,$$

mediante aproximaciones sucesivas.

$$u^{(0)}(t, a) = 0,$$

$$u^{(1)}(t, a) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ -a_1^2 \frac{e^{-2t}}{3} \end{pmatrix},$$

$$u^{(3)}(t, a) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} + \frac{1}{27} a_1^4 (e^{-4t} - e^{-t}) \\ -a_1^2 \frac{e^{-2t}}{3} \end{pmatrix}.$$

Luego la variedad estable ($y = u_2(0, (x, 0))$) se aproxima por

$$y = -\frac{x^2}{3} (+\mathcal{O}(x^5)).$$

El resultado anterior indica que las variedades estables e inestables en entorno de un punto singular hiperbólico son tangentes al linealizado, es decir, que a primer orden coinciden.

El Teorema de Hartman-Grobman afirma que en un entorno de un punto singular hiperbólico no sólo coinciden a primer orden, sino que los campos son topológicamente conjugados, es decir, un “cambio de coordenadas” transforma uno en el otro.

En particular, el Teorema de Hartman-Grobman resuelve totalmente el problema de determinar la estabilidad y el comportamiento cualitativo de las soluciones en un entorno de un punto singular hiperbólico.

TEOREMA 2.9 (Teorema de Hartman-Grobman [6]). *Sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$.*

Si x_0 es un punto singular hiperbólico, entonces $x' = f(x)$ y $x' = Df(x_0)(x - x_0)$ son topológicamente conjugados en un entorno de x_0 .

2.4. Teorema de la variedad central. Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, donde \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^n . Hemos visto que si $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio hiperbólico de $x' = f(x)$, entonces el Teorema de Hartman-Grobman determina completamente la dinámica local.

Vamos a suponer que x_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico. Por simplicidad de la notación, tomaremos $x_0 = 0$ (siempre podemos suponer que es 0 mediante un cambio de variables). Si denotamos $A = Df(0)$, por un cambio de variable lineal, podemos suponer que

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix},$$

donde la matriz cuadrada C tiene c autovalores con parte real 0, P tiene p autovalores con parte real negativa y Q tiene q autovalores con parte real positiva. Entonces el sistema $x' = f(x)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x' &= Cx + F(x, y, z), \\ y' &= Py + G(x, y, z), \\ z' &= Qz + H(x, y, z), \end{aligned}$$

donde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $F(0) = G(0) = H(0) = 0$ and $DF(0) = DG(0) = DH(0) = 0$.

TEOREMA 2.10 (Teorema de la Variedad Central, ver [15]). *En las condiciones anteriores, existen funciones de clase \mathcal{C}^1 , h_1, h_2 verificando*

$$(7) \quad \begin{aligned} Dh_1(x) (Cx + F(x, h_1(x), h_2(x))) - Ph_1(x) - G(x, h_1(x), h_2(x)) &= 0 \\ Dh_2(x) (Cx + F(x, h_1(x), h_2(x))) - Qh_2(x) - H(x, h_1(x), h_2(x)) &= 0 \end{aligned}$$

tales que el sistema $x' = f(x)$ restringido a un entorno del origen es topológicamente conjugado a

$$\begin{aligned} x' &= Cx + F(x, h_1(x), h_2(x)), \\ y' &= Py, \\ z' &= Qz, \end{aligned}$$

restringido a un entorno del origen.

COMENTARIO 2.11. La ecuación (7) se obtiene de imponer que la variedad central, $y = h_1(x)$, $z = h_2(x)$ sea un invariante del campo. Derivando entonces en $y = h_1(x)$ y $z = h_2(x)$ respecto de t , tenemos (7).

A diferencia de las variedades estable e inestable, la variedad central no tiene porqué ser única.

EJEMPLO 2.12. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= x^2y - x^5, \\y' &= -y + x^2.\end{aligned}$$

En este caso, la parte lineal es

$$\begin{aligned}x' &= 0, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

y las funciones que describen las partes no lineales son

$$F(x, y) = x^2y - x^5, \quad G(x, y) = x^2.$$

Tenemos una única función que describe la variedad de centro, h_1 , que deberá verificar (7), es decir,

$$Dh_1(x)F(x, h_1(x)) + h_1(x) - G(x, h_1(x)) = 0.$$

Para obtener una aproximación, desarrollamos h_1 en serie de potencias ($h_1(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \mathcal{O}(x^4)$) y obtenemos los coeficientes de modo que satisfagan la ecuación anterior

$$\begin{aligned}(2ax + 3bx^2 + cx^4 + \mathcal{O}(x^5)) (x^2(ax^2 + bx^3 + cx^4 + \mathcal{O}(x^5)) - x^5) \\+ (ax^2 + bx^3 + cx^4 + \mathcal{O}(x^5)) - x^2 = 0.\end{aligned}$$

Resolviendo, tenemos

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

Luego $h_1(x) = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ y la ecuación para la variedad central queda

$$x' = x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

2.5. Formas normales. En los apartados anteriores, hemos visto que si tenemos un punto crítico hiperbólico, tenemos totalmente determinada la dinámica (local) del sistema. Si el punto crítico no es hiperbólico, podemos reducir la dinámica a la variedad central.

El problema que consideramos ahora es cómo simplificar el estudio de la dinámica (en la variedad central) en un punto crítico no hiperbólico.

Un método, originado en la Tesis de H. Poincaré, consiste en reducir el sistema a su “forma normal”, mediante un cambio de coordenadas (o una serie de cambios de coordenadas). Usualmente, en cada paso tratamos de eliminar el mayor número de coeficientes de la expresión en serie de potencias del sistema en un entorno del punto crítico.

Comparemos este método con el Teorema de Hartman-Grobman. Este Teorema garantiza la existencia de un homeomorfismo h que produce una conjugación entre el sistema y su linealizado. Sin embargo, en muchos casos este homeomorfismo no será diferenciable, es decir, no es un “verdadero” cambio de coordenadas.

EJEMPLO 2.13. ([17]) Consideremos el sistema lineal (con un punto de equilibrio hiperbólico en el origen)

$$\begin{aligned}x' &= 2x, \\y' &= y,\end{aligned}$$

al que denotaremos $x' = F(x)$, y la familia de sistemas cuadráticos con la misma parte lineal

$$(8) \quad \begin{aligned}x' &= 2x + ax^2 + bxy + cy^2, \\y' &= y + a'x^2 + b'xy + c'y^2.\end{aligned}$$

Consideremos ahora un cambio de variable de la forma $x = h(y)$, con h un polinomio cuadrático. Para conservar el punto crítico en el origen, tomaremos $h(0) = 0$ y para conservar la parte lineal, $Dh(0) = Id$. Tenemos entonces

$$h(y) = y + h^{[2]}(y),$$

donde $h^{[2]}$ denota los términos cuadráticos.

Derivando en $x = h(y)$,

$$x' = dh(y)y'$$

Como $dh = Id + dh^{[2]}$, dh es invertible en un entorno del origen y su inversa es $dh^{-1} = Id - dh^{[2]} + \dots$, donde los puntos suspensivos indican términos de grado mayor o igual a dos. Sustituyendo en la igualdad anterior.

$$(9) \quad y' = \left(Id - dh^{[2]} + \dots \right) x' = \left(Id - dh^{[2]} + \dots \right) F(h(y)).$$

Vamos a escribir

$$h(x, y) = \left(\sum a_{ij}x^i y^j, \sum b_{ij}x^i y^j \right).$$

Sustituyendo en (9), tenemos

$$\begin{aligned}x' &= 2x + (a - 2a_{20})x^2 + (b - a_{11})xy + cy^2 + \dots, \\y' &= y + (a' - 3b_{20})x^2 + (b' - 2b_{11})xy + (c' + b_{02})y^2 + \dots,\end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de grado tres o superior. Entonces, eligiendo convenientemente los coeficientes de h , tenemos que (8) es equivalente a

$$\begin{aligned}x' &= 2x + cy^2 + \dots, \\y' &= y + \dots,\end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de grado tres o superior. A esta forma del sistema se denomina forma normal y a los términos que no se pueden eliminar, términos resonantes.

2.6. Conjuntos límites. Consideremos

$$x' = f(x),$$

con f una función continua y localmente lipschitziana en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sea u una solución maximal de $x' = f(x)$. Por simplicidad, vamos a suponer que su intervalo de definición es todo \mathbb{R} (se puede probar que esto no es restrictivo).

Denominamos ω -límite de u al conjunto

$$\Omega(u) = \{p \in U : \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k) = p, \text{ para alguna sucesión } t_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\}.$$

Se define el α -límite de u como el conjunto $\Omega(x)$ de la solución $v(t) = u(-t)$ del sistema $x' = -f(x)$ (es decir, tras el cambio $t \rightarrow -t$).

PROPOSICIÓN 2.14. *Supongamos que $\overline{u(\mathbb{R})}$ es un conjunto compacto de U . Se verifica*

$$\Omega(u) = \{p\} \text{ si y sólo si } \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = p.$$

PROOF. Basta probar que si $\Omega(x) = \{p\}$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = p$.

Supongamos por contradicción que existe una subsucesión de puntos t_k que no convergen a $\{p\}$. Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que t_k está fuera de un entorno abierto fijado de p . Como estamos en un compacto, existiera una subsucesión convergente a un punto $q \neq p$. Pero entonces $q \in \Omega(x)$. \square

Decimos que una solución maximal $u(t, x_0)$ es periódica o cerrada si está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y existe $T > 0$ tal que $u(t, x_0) = u(t + T, x_0)$.

PROPOSICIÓN 2.15. *Si $u(t)$ es una solución periódica, entonces $\Omega(u) = \text{orb}(u)$.*

PROOF. Sea $T > 0$ el periodo de u , es decir, $u(t + T) = u(t)$.

Como $\overline{u(\mathbb{R})} = u(\mathbb{R})$, entonces $\Omega(u) \subset \text{orb}(u)$.

Por otra parte, si $p \in \text{orb}(u)$, es decir, existe t_0 tal que $u(t_0) = p$, entonces

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_0 + kT), \quad k \in \mathbb{N},$$

luego $p \in \Omega(u)$. \square

TEOREMA 2.16. *Los conjuntos α y ω -límite de una solución u de $x' = f(x)$ son cerrados e invariantes. Es más, si la imagen de u está contenida en un compacto, entonces son no vacíos, conexos y compactos.*

PROOF. • Demostración de cerrado:

Tomamos p_n tendiendo a p en el omega límite y probamos que entonces p está en el omega límite:

Tenemos $\phi(t_k^{(n)}, x_0) \rightarrow p_n$.

Existe $K(n)$ tal que $\phi(t_k^{(n)}) < 1/n, k \geq K(n)$.

Tomando $K(n) = \max(K(n), n)$, podemos asumir $t_n = t_{K(n)}^{(n)}$ tiende a infinito. Entonces

$$\begin{aligned} |u(t_n, t_0, x_0) - p| &< |u(t_n, t_0, x_0) - p_n| + |p_n - p| \\ &< 1/n + |p_n - p| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

• Demostración de la invarianza:

Sea $x_0 \in \Omega(u)$ y sea t_k tal que $u(t_k) \rightarrow x_0$ para $k \rightarrow \infty$. Consideremos $v(t, x_0)$ la solución determinada por la condición inicial $v(0) = x_0$. Entonces $u(t + t_k) = v(t, u(t_k)) \rightarrow v(t, x_0)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Luego $v(t, x_0) \in \Omega(u)$.

- Demostración de acotado y no vacío:

Por ser un subconjunto de $\bar{u}(\mathbb{R})$, que es acotado por hipótesis, tenemos que $\Omega(u)$ es acotado y no vacío, pues toda sucesión, admite una subsucesión convergente.

- Demostración de la conexión:

Supongamos que $\Omega(x)$ no es conexa. Existen A, B cerrados disjuntos tal que $\Omega(x) = A \cup B$. Por ser compactos, tenemos una distancia positiva entre ambos, δ . Consideremos los entornos de radio $\delta/2$ de ambos, U_A, U_B . $\Omega(u) \subset U_A \cup U_B$.

Por otra parte, por definición de $\Omega(u)$, existe $t_0 > 0$ tal que $u(t) \in U_A \cup U_B$ para todo $t > t_0$ (en otro caso, tendríamos un punto de la adherencia fuera de $\Omega(u)$). Como $u([t_0, +\infty))$ es un conexo, o bien está en U_A o en U_B . Supongamos que se da el primer caso. Por otra parte, si $p \in B$, entonces existe una sucesión de puntos de $u([t_0, +\infty))$ que converge a p , en contradicción con $u([t_0, +\infty)) \subset U_A$.

□

3. Sistemas diferenciales planos

A partir de ahora consideramos

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y),$$

con f, g continuas y localmente Lipschitz.

3.1. Teorema de Poincaré-Bendixon.

TEOREMA 3.1 (Teorema de Poincaré-Bendixon [19]). *Si $\Omega(u)$ es compacto y no contiene puntos críticos, entonces $\Omega(u)$ es una órbita periódica, es decir, $\Omega(u) = \{u(t, x_0) : t \in \mathbb{R}\}$, donde $u(t, x_0)$ es una órbita periódica.*

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN. Supongamos por contradicción que no es una órbita periódica.

Como $\Omega(u)$ es no vacío, entonces existe $x_0 \in \Omega(u)$ y como no contiene puntos críticos, x_0 es un punto regular. Por tanto, existe un entorno W y una sección transversal

$$D: I = (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad D(0) = x_0,$$

donde se aplica el Teorema del Flujo Regular (el campo restringido a W es topológicamente conjugado al campo constante y la conjugación envía $D(I)$ a $\{0\} \times \mathbb{R}$).

Por otra parte, como $\Omega(u)$ es invariante, si $v(t, x_0)$ es la solución determinada por la condición inicial $v(0, x_0) = x_0$, entonces $v(t, x_0) \in \Omega(u)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (está definido en todo \mathbb{R} por ser acotada). Es decir, $\Omega(v(t, x_0)) \subset \Omega(u)$.

Veamos que la órbita de v corta a $D(I)$ en un único punto:

En primer lugar, probaremos que si una órbita corta a una sección transversal en dos puntos, entonces divide al plano en dos regiones, una positivamente invariante y la otra negativamente.

Supongamos que $v(t, x_0)$ corta a $D(I)$ en otro punto distinto de x_0 . Sean $t_1 < t_2$ dos cortes consecutivos tales que $v(t_1, x_0) = D(s_1) \neq v(t_2, x_0) = D(s_2)$ (podemos suponer $s_1 < s_2$).

Entonces la curva de Jordan definida por $v([t_1, t_2], x_0)$ y $D([s_1, s_2])$ divide al plano en dos regiones, de modo que una de ellas es positivamente invariante y la otra negativamente invariante.

Considerando los distintos casos de los cortes de $u(t)$ con $D[s_1, s_2]$ y el Teorema del Flujo Tubular sobre $D([s_1, s_2])$, se llega a que no es posible que $v(t_1, x_0)$ y $v(t_2, x_0)$ pertenezcan a $\Omega(u)$ y de esta contradicción, la órbita de v corta a $D(I)$ en un único punto.

Tomemos $y_0 \in \Omega(u(t, x_0)) \subset \Omega(u)$ y consideremos una sección transversal. Tenemos entonces que existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ tal que $v(t_n, x_0) \rightarrow y_0$. Tomando una subsucesión podemos suponer que $y(t_n, x_0) \in W$. Es más, aplicando el Teorema del Flujo Tubular, podemos tomar $v(t_n, x_0) \in D(I)$. Como $v(t_n, x_0)$ corta a $D(I)$ en un único punto, entonces $v(t_n, x_0) = x_0$ y $v(t, x_0)$ es periódica.

Supongamos que $\Omega(v(t, x_0)) \neq \Omega(u)$. Como $\Omega(u) \setminus \Omega(v(t, x_0))$ no es cerrado ($\Omega(u)$ y $\Omega(v(t, x_0)) \subset \Omega(u)$ son conexos y cerrados). Entonces existe $y_0 \in \Omega(v(t, x_0))$ punto de acumulación de $\Omega(u) \setminus \Omega(v(t, x_0))$. Ahora bien, y_0 es regular, por lo que podemos considerar una sección transversal en un entorno de y_0 . La solución u cortará a dicha sección transversal en puntos arbitrariamente cerca de y_0 . Razonando igual que antes, se prueba que la intersección de $\Omega(u)$ con la sección transversal ha de ser y_0 , en contradicción con que sea punto de acumulación de $\Omega(u) \setminus \Omega(v(t, x_0))$. □

COROLARIO 3.2. *Toda órbita cerrada en el plano contiene un punto crítico.*

PROOF. Basta considerar las órbitas cerradas minimales y aplicar el Teorema del punto fijo de Brouwer en la región interior a la órbita minimal. □

PROPOSICIÓN 3.3. *Toda órbita no constante en el plano o bien es isomorfa a una recta o bien es isomorfa a una circunferencia.*

PROOF. Si una órbita es cerrada ($u(0) = u(T)$) tenemos $v: S^1 = [0, 1] / \sim \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \rightarrow v(t) = u(tT)$. Hay que probar que es un homeomorfismo. Para ello hay que probar que es abierta. Tomamos un punto p de la órbita $p = v(t_0)$. Fijamos un radio r y tomamos la imagen de $I = (t_0 - r, t_0 + r)$. La imagen del complementario de I es un compacto. Sea d la distancia de p a dicha imagen. Tomamos una sección transversal en p , $\gamma: J \rightarrow E$. Podemos tomar J una bola cerrada tal que $|\gamma(s) - p| < d/2$. Entonces por continuidad existe ϵ tal que $|u(t, \gamma(s)) - p| < d$ para todo $|t| < \epsilon$. Sea U el abierto

$$U = \{u(t, \gamma(s)): |t| < \epsilon, s \in \overset{\circ}{J}\}$$

Entonces la topología restringida a U coincide con la topología imagen y concluimos.

Si una órbita no es cerrada, entonces es inyectiva. Basta probar que para cada punto de la imagen, existe un entorno del plano de modo que

la intersección del entorno con la imagen es únicamente la imagen de un intervalo del dominio.

Tomamos un punto, una sección transversal y aplicamos el Teorema de Poincaré-Bendixon.

□

3.2. Problemas de Poincaré y Hilbert. Sea $u(t, p)$ una órbita periódica y consideremos una sección transversal Σ . Por continuidad, si $q \in \Sigma$ está suficientemente próximo a p , entonces existe $t_1(q) > 0$ tal que $u(t_1(q), q) \in \Sigma$ y $u(t, q) \notin \Sigma$ para todo $0 < t < t_1(q)$.

Se define la aplicación de Poincaré, π como

$$\pi(q) = u(t_1(q), q), \quad q \in \Sigma.$$

La aplicación de Poincaré es continua por la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales. Si el campo es analítico, entonces π es analítica.

Por el Teorema de Poincaré Bendixon, si π está definido en q , entonces $u(t, q)$ es periódica si y sólo si $\pi(q) = q$.

En el caso de ser analítica, o bien los puntos fijos son aislados o bien la aplicación es la identidad.

Decimos que una solución periódica $u(t, p)$ es un ciclo límite si en un entorno de p , la aplicación de Poincaré no tiene puntos fijos.

Decimos que tenemos un centro cuando la aplicación de Poincaré es la identidad.

Consideremos el sistema

$$(10) \quad x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y),$$

donde P, Q son polinomios de grado n

Problema del Centro-Foco de Poincaré

Supongamos que el origen es un punto de equilibrio del sistema (10) y los autovalores tienen parte real nula. Determinar si es un centro o un foco.

Problema 16 de Hilbert

Determinar en términos de n el número máximo de ciclos límite de (10) y sus posibles configuraciones.

3.3. Sistemas planos cuadráticos. Consideremos el sistema plano [8],

$$(11) \quad \begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

con P, Q polinomios de grado 2. Supondremos que P y Q son primos entre sí, es decir, que no hay variedades de puntos críticos. Si no son primos entre sí, mediante un cambio en el tiempo tenemos que fuera de donde se anule el factor común son topológicamente equivalentes (ver Teorema de Existencia Global).

LEMA 3.4. *Tres puntos críticos no pueden ser colineales.*

En toda recta que no sea invariante, el número total de puntos críticos y puntos tangentes al campo es a lo sumo dos.

En caso de haber dos puntos de tangencia, R_1, R_2 , el campo tiene una orientación en el segmento (R_1, R_2) y en todos los demás puntos la orientación es la opuesta.

PROOF. Consideremos la recta $ax + by + c = 0$.

Si la recta contiene tres puntos críticos, entonces corta a las cónicas $P = 0, Q = 0$ en tres puntos, luego está contenida en ellas, en contradicción con P, Q primos.

Dado un punto de la recta, es tangente al campo cuando corta a la cónica $aP(x, y) + bQ(x, y) = 0$. Por tanto o bien la recta es invariante o bien corta a dicha cónica en dos puntos. Es más, en caso de cortar en dos puntos, el signo de $aP(x, y) + bQ(x, y)$ entre los dos puntos (orientación) es opuesto al signo de los demás puntos. \square

TEOREMA 3.5. *El interior de una órbita cerrada es una región convexa.*

PROOF. Supongamos que una cuerda corta el borde. Podemos asumir que contiene puntos exteriores. Entonces la cuerda corta a la órbita en dos puntos con orientaciones opuestas. Por el Lema previo, esto implica que no puede cortar en más puntos, en contradicción con que los extremos sean interiores. \square

TEOREMA 3.6. *Existe un único punto crítico en el interior de cada órbita cerrada.*

PROOF. En general, sabemos que hay al menos uno. Supongamos que hay dos, R_1, R_2 . Entonces la recta que une R_1 con R_2 corta a la órbita cerrada en dos puntos, con orientaciones opuestas, lo que contradice el Lema. \square

Como consecuencia, dentro de una órbita no puede haber dos disjuntas.

TEOREMA 3.7. *Si dos órbitas cerradas tienen interiores disjuntos, entonces sus orientaciones son opuestas.*

PROOF. Unimos los puntos críticos y entonces corta a las dos órbitas en dos puntos que han de tener la misma orientación. \square

TEOREMA 3.8. *Si dos órbitas cerradas tienen interiores no disjuntos, entonces tienen la misma orientación.*

PROOF. Se toma una recta que pase por el punto crítico. Si tienen orientaciones diferentes se llega a contradicción. \square

COROLARIO 3.9. *Si tenemos dos puntos de tipo foco o centro, entonces su orientación es opuesta.*

COROLARIO 3.10. *A lo sumo hay dos puntos de tipo foco o centro.*

Escribiremos

$$P(x, y) = \sum_{i+j \leq 2} a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j \leq 2} b_{ij} x^i y^j.$$

TEOREMA 3.11. *Todo punto crítico en el interior de una órbita cerrada debe ser un foco o un centro.*

PROOF. Supongamos que el origen es el punto crítico. Si el origen no es un foco ni un centro, entonces

$$(b_{01} - a_{10})^2 + 4a_{01}b_{10} \geq 0,$$

Si pasamos a coordenadas polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, obtenemos

$$\theta' = f_2(\theta) + rf_3(\theta),$$

donde

$$f_2(\theta) = b_{10} \cos^2 \theta + (b_{01} - a_{10}) \cos \theta \sin \theta - a_{01} \sin^2 \theta,$$

$$f_3(\theta) = b_{20} \cos^3 \theta + (b_{11} - a_{20}) \cos^2 \theta \sin \theta + (b_{02} - a_{11}) \cos \theta \sin^2 \theta - a_{02} \sin^3 \theta.$$

Como $(b_{01} - a_{10})^2 + 4a_{01}b_{10} \geq 0$, $f_2(\theta)$ tiene al menos una raíz real, θ_1 .

Como $f_3(\theta)$ es un polinomio de grado tres, entonces también tiene una raíz real, θ_2 .

Si $\theta_1 = \theta_2$, entonces $\theta = \theta_1$ es invariante y no pueden existir órbitas periódicas.

En caso contrario, podemos suponer que existe $[\theta_1, \theta_2]$ de modo que f_2, f_3 no cambian de signo en el interior (por ejemplo $-f_2/f_3$ es positivo, si no trasladamos π) y el signo de θ' es opuesto en los extremos. Entonces cualquier órbita que entre en el sector permanece en él o bien para tiempo positivo o bien para tiempo negativo, en contradicción con la existencia de una órbita periódica. □

TEOREMA 3.12 ([5]). *Supongamos que el origen es punto singular. Si un ciclo límite, que denotaremos $(r(t), \theta(t))$ en coordenadas polares, rodea al origen, entonces $\theta'(t) \neq 0$.*

PROOF. Como se probó en el teorema anterior, $f_2 \neq 0$. Supondremos $f_2 > 0$, siendo el otro caso análogo.

Además, $\theta' = 0$ si y sólo si $f_2(\theta) + rf_3(\theta) = 0$. Por tanto tenemos definida una función

$$r_0(\theta) = -\frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}.$$

Como f_3 tiene ceros, r_0 tiene asíntotas verticales. Sean θ_1, θ_2 ceros consecutivos de f_3 tales que r_0 está definida en para $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ y supongamos que existe t_3 tal que $\theta'(t_3) = 0$, $r'(t_3) > 0$ y $\theta(t_3) \in (\theta_1, \theta_2)$.

Consideremos el radio de ángulo $\theta(t_3)$. Entre 0 y $r_0(\theta(t_3))$ es una transversal al campo y lo mismo entre $r_0(\theta(t_3))$ e infinito. Por el Teorema de Poincaré-Bendixon, la solución no puede volver a cortar a ninguna de las dos transversales, luego para $\theta_0 > \theta(t_3)$ suficientemente próximo, el radio de ángulo θ_0 y la solución no se cortan. Es decir, la solución no rodea al origen. □

TEOREMA 3.13. *Supongamos que el origen es un punto crítico de (11) y no es un centro.*

Existe una correspondencia biunívoca entre los ciclos límite que rodean al origen y las soluciones 2π -periódicas positivas de la ecuación de Abel

$$(12) \quad x' = \lambda x + B(t)x^2 + A(t)x^3,$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ y ciertos polinomios trigonométricos A, B , de grado 6, 3 respectivamente.

PROOF. Como sabemos que el origen es un foco o un centro, podemos suponer que $P = P_1 + P_2$, con $P_1 = ax - by$ y que $Q = Q_1 + Q_2$ con $Q_1 = bx + ay$. Entonces al pasar (11) a coordenadas polares, tenemos

$$r' = ar + h(\theta)r^2, \quad \theta' = b + g(\theta)r,$$

donde

$$h(\theta) = \cos(\theta)P_2(\cos \theta, \sin \theta) + \sin(\theta)Q_2(\cos \theta, \sin \theta),$$

$$g(\theta) = \cos(\theta)P_2(\cos \theta, \sin \theta) - \sin(\theta)Q_2(\cos \theta, \sin \theta).$$

Hacemos el cambio de variables

$$\rho = \frac{r}{f_2(\theta) + rf_3(\theta)},$$

que es válido para $b\theta' > 0$ (hemos probado que los ciclos límite están incluidos) y obtenemos la ecuación de Abel buscada. \square

PRÁCTICA 3.14. *Consideramos el sistema cuadrático plano*

$$x' = \sum_{i+j \leq 2} a_{ij} x^i y^j, \quad y' = \sum_{i+j \leq 2} b_{ij} x^i y^j.$$

- (1) *Determinar los coeficientes para que verifique las siguientes condiciones:*
 - (a) *Los puntos críticos sean $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$.*
 - (b) *Los puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ tengan como autovalores i y $-i$.*
 - (c) *El punto $(1, 1)$ tenga autovalores 1 y -1 .*
 - (d) *La recta que une $(-1, 0)$ con $(1, 1)$ sea invariante.*
- (2) *Asigna a los coeficientes restantes (si queda alguno) un valor arbitrario y dibuja el campo de pendientes.*
- (3) *Dibuja la curva formada por los puntos en los que el campo es proporcional a la recta de que une el punto con el origen (dirección radial).*
- (4) *Obtén el campo en coordenadas polares en el origen. Dibuja el campo en las coordenadas polares, poniendo r y θ en los ejes coordenados.*
- (5) *Consideramos $\rho = r/(\theta')$. Obtén la ecuación diferencial que satisfice ρ .*
- (6) *Dibuja el campo de la ecuación anterior.*
- (7) *¿Cuál es el mayor valor de ρ_0 de modo que la solución que en $\theta = 0$ vale ρ_0 está definida para θ en $[0, 2\pi]$? (viene dado por la imagen del segmento que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$).*

4. Ecuaciones de Abel

En esta sección consideraremos la ecuación diferencial de Abel con coeficientes trigonométricos

$$(13) \quad x' = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x + D(t),$$

donde A, B, C, D son polinomios trigonométricos, es decir, polinomios de $\mathbb{R}[\sin(t), \cos(t)]$. Nótese que este no es un anillo de factorización única, pues por ejemplo

$$1 - \cos^2 t = (1 - \cos t)(1 + \cos t) = \sin t \sin t.$$

El estudio de la dinámica de esta ecuación depende fuertemente del número de soluciones periódicas que tenga. Recordemos que una solución u de (13) es periódica si existe $T > 0$ tal que u está definida en $[t_0, t_0 + T]$ y $u(t_0 + T) = u(t_0)$. De ahí obtenemos que u está definida en todo \mathbb{R} y $u(t + T) = u(t)$ para todo t .

PROPOSICIÓN 4.1. *$u(t)$ es una solución periódica de (13) si y sólo si es 2π -periódica.*

PROOF. Si $u(2\pi) \neq u(0)$, llegamos a contradicción. \square

Sea $u(t, x)$ la solución de (13) determinada por la condición inicial $u(0, x) = x$. Se define la aplicación de Poincaré, $\pi(x) = u(2\pi, x)$ y la aplicación de desplazamiento $d(x) = \pi(x) - x$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Existe una correspondencia biunívoca entre los ceros de d y las soluciones periódicas de (13).*

PROOF. Basta tomar condición inicial. \square

El llamado Problema de Smale-Pugh, consiste en, dados n, m , obtener el máximo número de ciclos límite de la ecuación de Abel (13) donde A, B son polinomios trigonométricos de grado n, m , respectivamente y $C = D = 0$.

4.1. Existencia de ciclos límite. En primer lugar, veremos que si $A(t) \equiv 0$ entonces el número de soluciones periódicas de (13) está acotado por el grado en x .

TEOREMA 4.3 (Alternativa de Fredholm). *Sea la ecuación*

$$(14) \quad x' = a(t)x + b(t),$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones T -periódicas y continuas.

Se verifica

- (1) Si $\bar{a} \neq 0$, entonces existe una única solución periódica de (14).
- (2) Si $\bar{a} = 0$ y $\bar{b} \neq 0$, entonces ninguna solución de (14) es periódica.
- (3) Si $\bar{a} = \bar{b} = 0$, entonces todas las soluciones de (14) son periódicas.

Se denominan ecuaciones de Ricatti periódicas a las ecuaciones de la forma

$$(15) \quad x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

donde $a(t), b(t)$ y $c(t)$ son funciones continuas y T -periódicas.

TEOREMA 4.4. *La ecuación de Riccati, (15), tiene a lo sumo dos soluciones periódicas, o todas sus soluciones son periódicas.*

PROOF. Supongamos que (15) tiene dos soluciones periódicas, u_1, u_2 . Por el cambio

$$y = \frac{x - u_1(t)}{u_2(t) - u_1(t)},$$

obtenemos que la ecuación (15) se transforma en

$$y' = d(t)y(y - 1),$$

donde $d(t) = a(t)(u_2(t) - u_1(t))$. Además, las soluciones periódicas de la ecuación (15) se transforman en ecuaciones periódicas de esta nueva ecuación. En particular u_1 se transforma en la solución 0 y u_2 en la 1.

Ahora hay varias posibilidades para completar la demostración. Por ejemplo, Lins-Neto [13] aplica el cambio de variable $z = (y - 1)/y$ para obtener una ecuación lineal y concluir. Pero también se podría concluir analizando la ecuación en variables separadas. □

Si eliminamos la restricción sobre los grados de A y B en el problema de Pugh, es decir, intentamos acotar el número de ciclos límite de (13), tenemos que no existe dicho máximo.

TEOREMA 4.5 (Lins-Neto [13]). *Para todo l , existe un polinomio $P(x)$ tal que la ecuación*

$$x' = \cos(t)x^2 + P(\sin(t))x^3$$

tiene al menos l ciclos límite.

Vamos a considerar la ecuación dependiente de un parámetro

$$x' = \cos(t)x^2 + \epsilon P(\sin(t))x^3.$$

Integrando:

$$u(2\pi, x_0) - x_0 = \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{P(\sin(t))}{1 - x_0 \sin(t)} dt + o(\epsilon)$$

Definimos

$$W(x_0) = \int_0^{2\pi} \frac{P(\sin(t))}{1 - x_0 \sin(t)} dt.$$

PROPOSICIÓN 4.6. *Cada cero simple de $W(x_0)$ produce una solución periódica para ϵ pequeño.*

PROOF. Consideramos $H(x_0, \epsilon) = (u(2\pi, x_0) - x_0)/\epsilon$. Aplicamos el Teorema de la Función Implícita y existe $x_0(\epsilon)$ tal que $H(x_0(\epsilon), \epsilon) = 0$ y $H(x_0, \epsilon) \neq 0$ para $x_0 \neq x_0(\epsilon)$ en un entorno de $(x_0, 0)$. □

PROPOSICIÓN 4.7. *Si tenemos una sucesión de $n+1$ funciones que truncadas a grado n producen la base de polinomios, entonces una combinación lineal de dichas funciones tiene al menos n raíces simples.*

PROOF. Para ello partimos de la que tiene grado más alto y vamos perturbando la función con funciones de grado menor, produciendo más ceros.

Además, escribiendo como $x^i(k+x+\mathcal{O}(x))$, y derivando, tenemos que podemos suponer que el cero es simple. \square

Definimos la aplicación $j^n(f)$ que consiste en truncar los términos de grado mayor que n en el desarrollo de Taylor.

PROPOSICIÓN 4.8. *Si la imagen de una familia lineal $n+1$ dimensional Y por la aplicación:*

$$P \rightarrow \tau(P) = j^n \left(\int_0^{2\pi} \frac{P(t)}{1-x \sin(t)} dt \right), \quad P(t) \in Y,$$

es epiyectiva en $\mathbb{R}[x]/x^{n+1}$, entonces existe P en la familia tal que $W(x)$ tiene al menos n ceros simples.

PROOF. Al ser epiyectiva, tenemos P_i tal que su imagen es x^i y aplicamos la proposición anterior. \square

PROPOSICIÓN 4.9. *La imagen de $Y = \{\sin^k t\}_{k=0,\dots,n}$ por τ es epiyectiva en $\mathbb{R}[x]/x^{n+1}$.*

PROOF. Recordemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Entonces, tenemos que

$$\tau(\sin^k t) = \sum_{j=0}^n a_{j+k} x^j, \quad a_j = \int_0^{2\pi} \sin^j t dt.$$

Luego la matriz de τ es

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Pero esta matriz es la del producto escalar $\langle P, Q \rangle = \int_0^{2\pi} PQ dt$ en la base $\{\sin^k t\}$. En particular es definida positiva. \square

4.2. Número de ciclos límite en una ecuación de Abel generalizada. Podemos considerar de modo genérico que tras el cambio de Cherkas aplicado a un sistema cuadrático plano (y para otros sistemas planos, ver Lloyd), tenemos una ecuación del tipo:

$$(16) \quad x' = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x,$$

donde A, B, C son polinomios trigonométricos.

Es conocido que si $A(t) > 0$, entonces (16) tiene a lo sumo tres ciclos límite:

TEOREMA 4.10 ([16]). Si $A(t) > 0$, entonces la ecuación (16) tiene a lo sumo tres ciclos límite.

Análogamente, si $A(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ o $A(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

PROOF. Derivamos tres veces. Entonces tenemos signo definido en la derivada tercera, lo que implica un máximo de tres ciclos límite.

El caso negativo se transforma en positivo con el cambio $t \rightarrow -t$. \square

Supongamos que la ecuación de Abel es de la forma $x' = f(t, x, \lambda)$, para cierto parámetro λ . Decimos que la ecuación de Abel es monótona respecto de λ (o que λ es un parámetro rotatorio) si $f_\lambda > 0$ para todo t, x, λ o $f_\lambda < 0$ para todo t, x, λ .

PROPOSICIÓN 4.11. Si la ecuación es monótona respecto de λ entonces las soluciones periódicas de $x' = f(t, x, \lambda)$ son disjuntas.

Además, si definimos $\pi(x, \lambda) = u(2\pi, x, \lambda)$, entonces existe una función $\lambda(x)$, definida en un intervalo abierto, tal que $\pi(x, \lambda(x)) = x$. Además, si $\pi(x, \lambda) = x$ y $\pi_x(x, \lambda) \neq 0$, entonces

$$\lambda'(x) = \frac{1 - \pi_x(x, \lambda)}{\pi_\lambda(x, \lambda)}.$$

PROOF. 1. El campo es monótono, lo que implica que las soluciones para un valor del parámetro son sub o supersoluciones.

2. Por el Teorema de la Función Implícita. \square

TEOREMA 4.12 ([11]). Si $B(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ o $B(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, entonces la ecuación (16) tiene a lo sumo tres ciclos límite.

PROOF. La clave es considerar la derivada de la aplicación retorno respecto de la condición inicial sobre las soluciones periódicas.

En primer lugar, $u(t) \equiv 0$ siempre es solución, por lo que podemos restringir el problema a contar las soluciones positivas o negativas.

Supongamos que u es una solución periódica positiva. Entonces

$$(17) \quad \frac{u'}{u} = Au^2 + Bu + C.$$

Derivando respecto de la condición inicial e integrando

$$u_x(2\pi, x) = \exp\left(\int_0^{2\pi} 3Au^2 + 2Bu + C dt\right).$$

De la ecuación (17), podemos despejar Au^2 . Sustituyendo,

$$u_x(2\pi, x) = \exp\left(\int_0^{2\pi} 3(u'/u - Bu - C) + 2Bu + C dt\right) = \exp\left(\int_0^{2\pi} -Bu - C dt\right).$$

Si B y $\int_0^{2\pi} \pi C(t) dt$ tienen el mismo signo, entonces π_x tiene el signo contrario y si tienen signo contrario, entonces π_x se anula en a lo sumo un punto, tiene el signo de $\int_0^{2\pi} \pi C(t) dt$ hasta ese punto y el contrario a partir de ahí.

Para terminar, basta considerar las posibilidades y descartar casos hasta obtener a lo sumo tres ciclos límite.

\square

TEOREMA 4.13 ([2]). *Si existe α tal que $\alpha A(t) + B(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ o $\alpha A(t) + B(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, entonces la ecuación (16) tiene a lo sumo tres ciclos límite.*

PROOF. Tenemos que si u es una solución periódica no nula, podemos escribir la ecuación como

$$(18) \quad u' = (\alpha A(t) + B(t))u^2 + A(t)u^2(u - \alpha) = D(t)u^2 + A(t)u^2(u - \alpha).$$

En particular, las soluciones periódicas no pueden cortar a α , porque es barrera (superior o inferior).

Dividiendo entre $u^2(1 - \alpha)$ e integrando (usando que u es periódica),

$$\int_0^{2\pi} A(t) dt = - \int_0^{2\pi} \frac{D(t)}{u - \alpha} dt.$$

Ahora calculamos la derivada de la aplicación retorno respecto la condición inicial sobre las periódicas y obtenemos

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= \exp \left(\int_0^{2\pi} 2D(t)u + 2A(t)u(u - \alpha) + A(t)u^2 dt \right) \\ &= \exp \left(\int_0^{2\pi} 2D(t)u + A(t)u(3u - \alpha) dt \right) \\ &= \exp \left(\int_0^{2\pi} 2D(t)u - \frac{D(t)}{u - \alpha}u(3u - 2\alpha) dt \right) \\ &= \exp \left(\int_0^{2\pi} D(t) \frac{-u^2}{u - \alpha} dt \right) \end{aligned}$$

que tiene signo en cada intervalo de $\mathbb{R} \setminus \{0, \alpha\}$, luego a lo sumo una solución en cada intervalo.

Considerando ahora los distintos casos, vamos a ver que a lo sumo tiene una solución periódica no nula. Tenemos varias posibilidades según el signo de α , D , $\int_0^{2\pi} B(t) dt$ y $\int_0^{2\pi} A(t) dt$. Veamos el primero.

Sea $\alpha > 0$, $D(t) > 0$, $\int_0^{2\pi} B(t) dt > 0$ y $\int_0^{2\pi} A(t) dt > 0$. La ecuación en variables separadas $x' = A(t)x^2(x - \alpha)$ tiene como soluciones periódicas $u = 0$ y $u = \lambda$. Además, si d^* es su aplicación desplazamiento, $d^*(x) > 0$ si $x > \alpha$ y $d^*(x) < 0$ si $x < \alpha$. Comparando dicha ecuación con (18), tenemos que las soluciones de $x' = A(t)x^2(x - \alpha)$ son subsoluciones de (18), luego (18) sólo puede tener soluciones periódicas en $(-\infty, \alpha)$. Además, si tiene alguna solución periódica u distinta de la 0, tenemos que $d'(u(0)) > 0$, por lo que d será positivo a la derecha de la solución y negativo a la izquierda.

Para concluir, basta estudiar cómo es la aplicación desplazamiento en un entorno de 0. Se tiene que $d(x) = \int_0^{2\pi} B(t) dt x^2 + \mathcal{O}(x^3)$. Como $\int_0^{2\pi} B(t) dt > 0$, se obtiene que $d(x) \geq 0$ en un entorno del origen. De aquí tenemos que a lo sumo tiene una solución periódica en $(-\infty, 0)$ y ninguna en los otros dos intervalos.

El resto de los casos es análogo (ejercicio). \square

Consideremos la ecuación

$$(19) \quad x' = p(t, x),$$

donde $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es suficientemente suave, T -periódica en t y polinomial en x .

Sea $d(x) = u(T, x) - x$. Derivando (19) respecto de las condiciones iniciales

$$(20) \quad d'(x) = \exp \left(\int_0^T p_x(t, u(t, x)) dt \right) - 1.$$

Cuando $d(x) = 0$ y $d'(x) \neq 0$, el ciclo límite $u(t, x)$ se denomina hiperbólico y el signo de $d'(x)$ determina la estabilidad

Si existe un intervalo I tal que para todo $x \in I$, se verifica que $d'(x) > 0$ (resp. < 0) sobre las condiciones iniciales de las soluciones periódicas, entonces existe a lo sumo una solución periódica con condición inicial en I .

Sea $q(t, x)$ un polinomio en x con coeficientes funciones T -periódicas with en t . Decimos que $q(t, x) = 0$ es una curva algebraica invariante periódica si existe $Q(t, x)$ polinomial en x y T -periódico en t , denominado cofactor de $q(t, x)$, tal que

$$q_t(t, x) + q_x(t, x)p(t, x) = q(t, x)Q(t, x).$$

Nótese que los coeficientes de Q como polinomio en x con funciones continuas que pueden tener polos en los ceros de los coeficientes de q .

Sea $u(t, x)$ una solución periódica de (19). Por unicidad de soluciones, o bien $q(t, u(t, x)) \neq 0$ para todo t o $q(t, u(t, x)) \equiv 0$. Supongamos que se cumple la primera posibilidad y que el conjunto de t tal que los coeficientes de $Q(t, x)$ tienen polos tiene medida nula. Entonces

$$\int_0^T Q(t, u) dt = \int_0^T \frac{q_t(t, u) + q_x(t, u)p(t, u)}{q(t, u)} dt = \int_0^T \frac{d(\ln |q(t, u)|)}{dt} dt = 0,$$

donde $u = u(t, x)$. Por tanto, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el signo de $d'(x)$ es el signo de

$$\int_0^T (p_x(t, u) + \alpha Q(t, u)) dt.$$

En particular, si no cambia de signo en alguna de las regiones definidas por las curvas algebraicas invariantes, tiene la ecuación de Abel tiene a lo sumo un ciclo límite en esa región.

Se pueden obtener más detalles en [3]. Además, esto está relacionado con el criterio de Bendixon-Dulac, que se puede consultar en [10].

Consideremos ahora

$$(21) \quad x' = a_n(t)x^n + \dots + a_1(t)x + a_0(t),$$

donde $a_n(t), \dots, a_0(t)$ son funciones continuas y T -periódicas.

TEOREMA 4.14 (Yu. Ilyashenko [12]). *Si $a_n(t) = 1$ y $\max_{t \in [0, T]} |a_i(t)| \leq c$, $i = 1, \dots, n-1$, entonces (21) tiene a lo sumo $A(n, c)$ soluciones periódicas, donde*

$$A(n, c) \leq 8 \exp \left\{ (3c + 2) \exp \left[\frac{3}{2} (2c + 3)^n \right] \right\}.$$

PROOF.

□

4.3. El problema del centro-foco. Consideremos de nuevo ecuaciones de la forma

$$x' = f(t, x),$$

donde f es T -periódica en t y polinomial en x y tal que $f(t, 0) = 0$.

Decimos que la ecuación tiene un centro si todas sus soluciones acotadas son periódicas.

El problema que planteamos es caracterizar las ecuaciones que tienen un centro.

4.3.1. *Problema del centro para Abel con coeficientes trigonométricos.* Consideremos la ecuación de Abel polinomial

$$(22) \quad x' = a_n(t)x^n + \dots + a_1(t)x,$$

donde $a_n(t), \dots, a_0(t)$ son polinomios trigonométricos.

Como en los anteriores apartados, definimo la aplicación de Poincaré $\pi(x) = u(2\pi, x)$. La aplicación de Poincaré vale 0 en $x = 0$ y es analítica respecto de las condiciones iniciales (x). Luego admite un desarrollo en serie de potencias, es decir,

$$\pi(x) = M_1x + M_2x^2 + \dots$$

Los coeficientes M_1, M_2, \dots se denominan funciones de Melnikov y dependen de a_1, a_2, \dots . Si $M_1 = 1$, la primera función de Melnikov no nula distinta de M_1 se denomina exponente de Lyapunov y determina la estabilidad del origen. Si $M_1 = 1$ y todas las funciones de Melnikov son nulas, entonces $\pi(x) = x$ y todas las soluciones acotadas son periódicas, es decir, tenemos un centro.

Para calcular las funciones de Melnikov, podemos considerar la solución como una suma formal respecto de la condición inicial

$$u(t, x) = b_1(t)x + b_2(t)x^2 + \dots$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$b_1'(t)x + b_2'(t)x^2 + \dots = a_1(t)(b_1(t)x + b_2(t)x^2 + \dots) + a_2(t)(b_1(t)x + b_2(t)x^2 + \dots)^2 + \dots$$

Igualando los coeficientes de x y usando que $u(0, x) = x$, obtenemos una serie de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} b_1'(t) &= a_1(t)b_1(t), & b_1(0) &= 1, \\ b_2'(t) &= a_1(t)b_2(t) + a_2(t)b_1^2(t), & b_2(0) &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Podemos resolverlas recursivamente, obteniendo

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \exp\left(\int_0^t a_1(s) ds\right), \\ b_2(t) &= \int_0^t a_2(s)b_1^2(s) \exp\left(\int_s^t a_1(\tau) d\tau\right) ds, \\ &\dots \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $M_1 = b_1(2\pi)$, $M_2 = b_2(2\pi)$, \dots

Consideremos ahora las ecuaciones $M_1 = 1$, $M_2 = M_3 = \dots = 0$, en función de los coeficientes de los polinomios trigonométricos a_1, a_2, \dots . Se puede demostrar que dichas ecuaciones son polinomiales. El conjunto de

coeficientes que verifican todas esas condiciones se denomina ideal de Bautin. Tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.15. *Fijado n y los grados de los polinomios a_1, \dots, a_n , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $M_1 = 1$ y $M_2 = \dots = M_N = 0$, entonces $M_{N+1} = M_{N+2} = \dots = 0$.*

Es decir, existe un índice tal que si las funciones de Melnikov hasta ese índice, entonces la ecuación tiene un centro. Dicho índice se denomina índice de Bautin. Para más detalle, consultar [4].

4.3.2. *Centros tangenciales.* Fijados $p(t), q(t)$ polinomios (trigonométricos) consideramos

$$(23) \quad x' = p(t)x^2 + q(t)x^3,$$

Denotamos $u(t, x)$ a la solución determinada por $u(0, x) = x$.

La ecuación (23) tiene un **centro** si

$$u(2\pi, x) = x,$$

para todo x en un entorno del origen

Fijados $p(t), q(t)$ polinomios (trigonométricos), consideramos

$$(24) \quad x' = p(t)x^2 + \epsilon q(t)x^3,$$

La ecuación (26) tiene un centro tangencial si

$$\int_0^{2\pi} p(t) dt + \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{q(t)}{\frac{1}{x} - \int_0^t p(s) ds} dt = 0$$

para todo x, ϵ en un entorno del origen.

En [Briskin-Françoise-Yonmin 2000], propusieron el siguiente problema:

PROBLEMA. *Fijado $p(t)$ polinomio (trigonométrico), obtener los polinomios (trigonométricos) $q(t)$ tales que*

$$(25) \quad x' = p(t)x^2 + \epsilon q(t)x^3,$$

tiene un centro tangencial.

El problema del centro-foco tangencial también se conoce como **problema de los momentos**:

PROPOSICIÓN 4.16 (Briskin-Françoise-Yondim 2000). *La ecuación (26) tiene un centro tangencial si y sólo si $\int_0^{2\pi} p(t) dt = 0$ y*

$$\int_0^{2\pi} P^k(z) dQ(z) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde

$$P(z) = \int_0^z p(t) dt, \quad Q(z) = \int_0^z q(t) dt$$

Supongamos que existe una función W , tal que

$$P = \tilde{P} \circ W, \quad Q = \tilde{Q} \circ W, \quad W(0) = W(2\pi).$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} P^k(z) dQ(z) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Cuando existe dicha W , decimos que la ecuación de Abel tiene un **centro de composición**.

TEOREMA 4.17 (Pakovich-Muzychuk 2009). *Dados polinomios p, q , la ecuación*

$$x' = p(t)x^2 + \epsilon q(t)x^3$$

tiene un centro tangencial si y sólo si existen polinomios $Q_j(z)$, $W_j(z)$, $W_j(a) = W_j(b)$, \tilde{P}_j , \tilde{Q}_j , tales que

$$Q(z) = Q_1(z) + \dots + Q_m(z),$$

$$P(z) = \tilde{P}_j(W_j(z)), \quad Q_j(z) = \tilde{Q}_j(W_j(z)).$$

Fijados $p(t)$, $q(t)$ polinomios trigonométricos, consideramos

$$(26) \quad x' = p(t)x^2 + \epsilon q(t)x^3,$$

La ecuación (26) tiene un centro tangencial si para todo w ,

$$\int_0^{2\pi} p(t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{q(t)}{w - \int_0^t p(s) ds} dt \equiv 0.$$

Aplicando el cambio de variables $z \rightarrow \exp(iz)$, es equivalente a:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dQ(z)}{t - P(z)} dt \equiv 0,$$

donde $P = \sum_{k=-m}^n a_k z^k$ (y Q) es un polinomio de Laurent.

Denotaremos $\mathcal{L} := \mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

TEOREMA 4.18 (Pakovich 2010, Zieve preprint). *Supongamos $P = g \circ h$, donde $P \in \mathcal{L} \setminus \{\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z^{-1}]\}$ y $g, h \in \mathbb{C}(x)$.*

Entonces existe $\mu \in \mathbb{C}(x)$ de grado 1 tal que

- $G \in \mathbb{C}[x]$ y $H \in \mathcal{L}$ ó
- $G \in \mathcal{L}$ y $H = x^l$ para algún $l \in \mathbb{N}$.

donde $G := g \circ \mu$ y $H := \mu^{-1} \circ h$.

PROPOSICIÓN 4.19. *Supongamos $P(z) = \tilde{P}(W(z))$, $Q(z) = \tilde{Q}(W(z))$, con $W \in \mathcal{L} \setminus \mathbb{C}[x]$.*

Entonces

$$\oint_{|z|=1} \frac{dQ(z)}{t - P(z)} dt \equiv 0,$$

PROPOSICIÓN 4.20. *Supongamos $P(z) = \tilde{P}(z^l)$, $Q(z) = \tilde{Q}(z^l) + R(z)$, donde $R(z)$ contiene los monomios de $Q(z)$ no divisibles entre z^l .*

Entonces $C(t) \equiv 0$ si y sólo si

$$\oint_{|z|=1} \frac{d\tilde{Q}(z)}{t - \tilde{P}(z)} dt \equiv 0,$$

LEMA 4.21. *Sean $P, Q \in \mathcal{L}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1)

$$\oint_{|z|=1} \frac{dQ(z)}{t - P(z)} dt \equiv 0,$$

(2) Fijado t cerca de infinito, se numeran las preimágenes $z_i(t)$ de $P(z) = t$ de modo que $\{z_k(t)\}_{k=1,\dots,n}$ (resp. $\{z_k(t)\}_{k=n+1,\dots,n+m}$) son puntos cercanos a infinito (resp. cero). Entonces

$$C(t) := \sum_{k=1}^n mQ(z_k(t)) - \sum_{k=n+1}^{n+m} nQ(z_k(t)) \equiv 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos como M_P el grupo de monodromía de $P \in \mathcal{L}$.

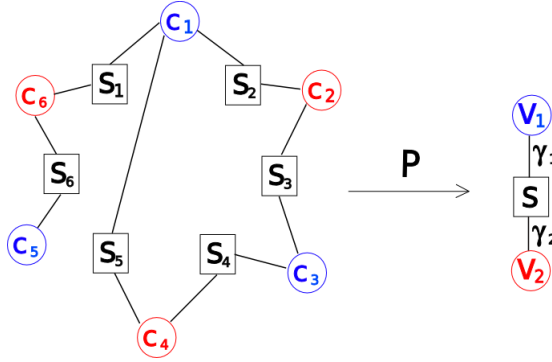


FIGURE 1. Ejemplo de dessin d'enfant

Dados $P, Q \in \mathcal{L}$,

$$\sum_{k=1}^{n+m} n_k Q(z_k(t)) \equiv 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{C}.$$

es equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n+m} n_k Q(z_{\sigma(k)}(t)) \equiv 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{C}, \sigma \in M_P.$$

que a su vez es equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n+m} n_{\sigma(k)} Q(z_k(t)) \equiv 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{C}, \sigma \in M_P.$$

Demostración del Lema

Numeraremos las raíces de modo que $(1, \dots, n)(n+1, \dots, n+m)$ es la permutación correspondiente a una vuelta alrededor de ∞ .

Dado $v = (v_1, \dots, v_{n+m}) \in \mathbb{C}^{n+m}$, lo identificaremos con

$$\sum_{k=1}^{n+m} v_k Q(z_k(t)).$$

Definimos

$$V = \langle \sigma(m, \overset{(n)}{\cdot}, m, -n, \overset{(m)}{\cdot}, -n) : \sigma \in G_P \rangle,$$

donde $\sigma(v)$ consiste en permutar las coordenadas de v según σ .

$B \subset \{1, \dots, n+m\}$ es un bloque si $\sigma(B) = B$ o $\sigma(B) \cap B = \emptyset$, para todo $\sigma \in M_P$.

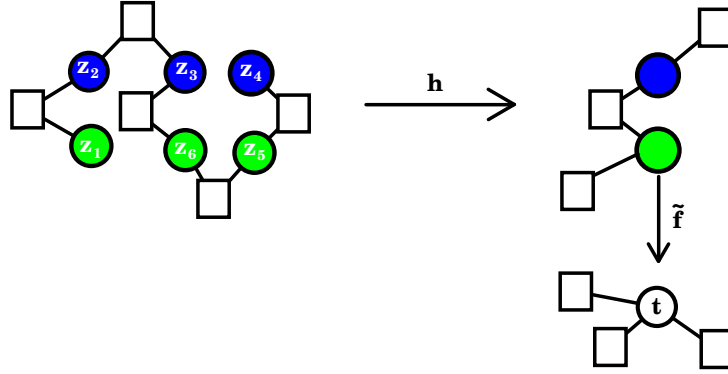


FIGURE 2. Dessin d'enfant de $P = \tilde{f} \circ h$

LEMA 4.22. Sea B un bloque que contiene el 1. Denotemos

$$R_B = \sum_j \delta_j^B Q(z_j(t)), \quad \delta_j^B = 1 \text{ si } j \in B, 0 \text{ en otro caso.}$$

Entonces $R_B = \tilde{Q}_B(W_B(z_1(t)))$, $P = \tilde{P}_B \circ W_B$.

Definimos

$$W = \langle w_B: (w_B)_j = 1 \text{ si } j \in B, (w_B)_j = 0 \text{ en otro caso} \rangle_{B \in \mathcal{B}}.$$

TEOREMA 4.23. Supongamos $(1, 0, \dots, 0) \in V + W$ y $B \not\subset \{1, \dots, n\}$ para todo bloque B . Entonces la ecuación tiene un centro tangencial sí y sólo si existen $Q_1, \dots, Q_m, W_1, \dots, W_m \in \mathcal{L}$ tales que

$$P(z) = \tilde{P}_j(W_j(z)), \quad Q_j(z) = \tilde{Q}_j(W_j(z)), \quad Q(z) = Q_1(z) + \dots + Q_n(z)$$

Supongamos $B \subset \{1, \dots, n\}$ para algún bloque B . Entonces $P(z) = \tilde{P}(z^m)$ y tenemos un centro tangencial si y sólo si

$$\sum_{k=1}^n m \tilde{Q}(\tilde{z}_k(t)) - \sum_{k=n+1}^{n+m} n \tilde{Q}(\tilde{z}_k(t)) \equiv 0.$$

Aplicando los resultados anteriores a los grupos de permutaciones transitivos realizables como grupo de monodromía de un polinomio de Laurent hasta grado 30.

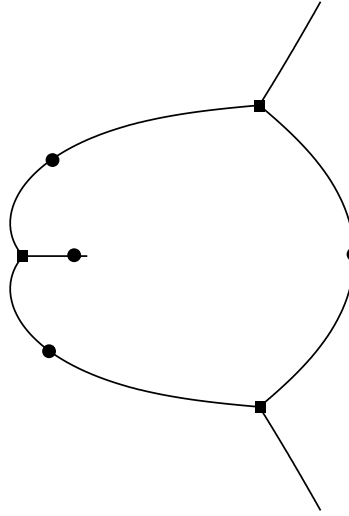
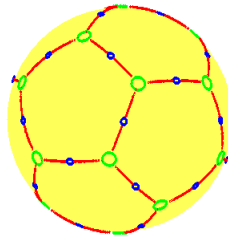
Grado	9	10	16	18	20	24	25	27	30
Grupos	34	45	1954	983	1117	25000	211	2392	5712
Excepciones	1	2	6	6	3	3	2	31	10

Ejemplo con $G_P = A_5(10)$

$$P(z) = \frac{(1+z) \left(\frac{123+55\sqrt{5}}{2} + \frac{29+13\sqrt{5}}{2}z + (-2-\sqrt{5})z^2 + z^3 \right)^3}{z^5}$$

Aunque P no se escribe como composición, existen polinomios de Laurent Q de grados 2, 4, 6, 8 y 10 verificando las ecuaciones de los momentos.

Ejemplo con $G_P = A_5(10)$

FIGURE 3. *Dessin d'enfant* de $P(z)$ FIGURE 4. *Dessin d'enfant* de $P \circ R$

Ejemplo con grupo $E9 : D_8$

$$P(z) = -\frac{(z-1)^4(2+z)(1+2z)^4}{2z^3}.$$

Calculamos las soluciones de $Q(z) = \sum_{k=-3}^5 a_k z^k$, obteniendo el espacio tridimensional definido por:

$$a_{-2} = -a_4/2, \quad a_{-1} = -a_2 - 9a_4/2 + 5a_5/4, \quad a_3 = -15a_5/4, \quad a_{-3} = 0.$$

Ejemplo con Grupo $E9 : D_8$

Ejemplo con grupo $t16n195$

$$P(z) = -940848 + 665280\sqrt{2} + (89152 - 63040\sqrt{2})W(z) \\ - (2376 - 1680\sqrt{2})W^2(z) + W^4(z),$$

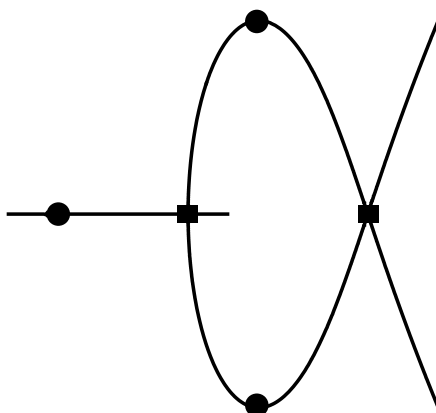


FIGURE 5. *Dessin d'enfant* de $P(z)$

donde,

$$W(z) = \frac{-99 + 70\sqrt{2} + (48 - 34\sqrt{2})z + (8 - 6\sqrt{2})z^3 + z^4}{z^2}.$$

De nuevo obtenemos soluciones que no se escriben como suma de composiciones:

$$Q_1 = 1/z^2 + (280 + 198\sqrt{2})z, \quad Q_2 = 1/z - (17 + 12\sqrt{2})z.$$

Ejemplo con grupo $t16n195$

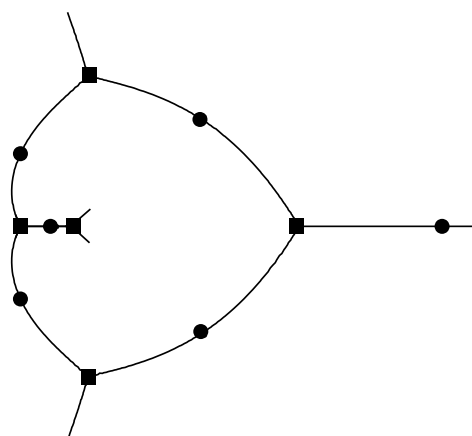


FIGURE 6. *Dessin d'enfant* de $P(z)$

TEOREMA 4.24. *Sea \mathcal{L}_{30}^* el conjunto de polinomios de Laurent hasta grado 30 asociados a polinómios trigonométricos con coeficientes reales vía $z = \exp(i\theta)$.*

Para cada $P \in \mathcal{L}_{30}^$, la ecuación tiene un centro tangencial si y sólo si estamos en uno de los casos del Teorema principal.*

TEOREMA 4.25. *Supongamos que $P \in \mathcal{L}_{30}^*$ y $\deg(P) = 2n > 2$ con n primo. Entonces se verifica que la ecuación tiene un centro tangencial si y sólo si*

- (1) $P(z) = \tilde{P}(z^n)$, y \tilde{P}, \tilde{Q} es un centro tangencial, donde $\tilde{Q}(z^n)$ es la suma de monomios de Q divisibles entre z^n .
- (2) Existe $W \in \mathcal{L} \setminus (\mathbb{C}[z] \cup \mathbb{C}[z^{-1}])$, $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{C}[z]$, tal que $P(z) = \tilde{P}(W(z))$, $Q(z) = \tilde{Q}(W(z))$.

Bibliography

- [1] Álvarez, Bravo, Christopher.
- [2] Álvarez, Gasull, Giacomini.
- [3] Bravo, Calderón, Fernández.
- [4] M. Briskin, J.P. Françoise, Y. Yondim, *Bautin ideal of the Abel equation*
- [5] Carbonell, Llibre.
- [6] Chicone (libro).
- [7] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill 1955.
- [8] W.A. Coppel, *A survey of quadratic systems*, J. Diff. Eq. **2** (1996, 293–304.
- [9] Guckenheimer-Holmes (libro)
- [10] Armengol Gasull, Hector Giacomini, *Some applications of the extended Bendixson-Dulac theorem*, in Progress and Challenges in Dynamical Systems, Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. 54, 233–252, Springer, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-38830-914]
- [11] Gasull-Llibre
- [12] Yu. Ilyashenko, *Hilbert-type numbers for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions*, Nonlinearity, **13**, (2000), 1337-1342.
- [13] Lins-Neto, *Inventiones Mathematicae*.
- [14] Dumotier, Llibre, Artes (libro).
- [15] Perko (libro).
- [16] Pliss (libro).
- [17] Shafer-Romanowsky (libro).
- [18] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer 1982.
- [19] A. Tineo, J. Rivero, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*.