

Problemas de Fundamentos de Matemáticas

(Temas 1,2,3)

Ingeniería Técnica en Diseño Industrial

1. Calcula, si existen, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, y máximo y mínimo, de los siguientes conjuntos:

- (a) $\{2, 2.2, 2.22, 2.222, \dots\}$
- (b) $\{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$
- (c) $\{1, 0.9, 1.1, 0.99, 1.11, \dots\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$
- (e) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 < 0\}$
- (f) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 \leq 0\}$
- (g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- (h) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
- (i) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- (a) $|x^2 + x| - 6 = 2$
- (b) $|x - 1||x^2 + x + 1| = 0$
- (c) $|x - 1| = |x - 4|$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones, representando su solución en la recta real:

- (a) $|x + 4| < 2$
- (b) $|9 - 2x| < 1$
- (c) $|x + 3| + |x - 1| > 8$
- (d) $0 < |x - 3| < 5$
- (e) $|x + 3| + |x - 1| < 3$

(f) $|x + 1| < |x - 3|$

(g) $|3x + 1| \geq 1$

(h) $|x + 3| + |x - 1| < 6$

(i) $|x + 3| - |x - 1| < 2$

4. Prueba que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que: $ab \leq (a^2 + b^2)/2$.

5. Prueba que si $0 \leq a \leq b$, entonces: $a \leq \sqrt{ab} \leq (a + b)/2 \leq b$.

6. Ordena, para $x > 1$, los siguientes números reales: $1, x, \sqrt{x}, x^2, 1/x, 1/\sqrt{x}$ y $1/x^2$.

7. Ordena los números del ejercicio anterior para $0 < x < 1$.

8. Compara para $x > 0$, $\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ y $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

9. Opera y simplifica cada una de las siguientes expresiones complejas:

(a) i^{2723}

(b) $(2 - 3i)(1 + i) - (1 + 2i)^2$

(c) $\frac{1+i}{(1-i)^2}$

(d) $(2 - i)^5$

(e) i^{-1}

(f) $(3 - 2i)(1 + 3i)(2 - i)$

(g) $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$

(h) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$

(i) i^{-221}

(j) $\frac{2i(3+i)+(1-i)(2+i)}{i^3(1+2i)}$

(k) $\sum_{k=0}^{100} i^k$

(l) $\sqrt{5 + 12i}$

10. Resuelve en \mathbb{C} las ecuaciones:

(a) $\frac{3-i}{z} = 4 + 2i$

(b) $\frac{z}{2+i} + \frac{3z-i}{2-i} = 3$

(c) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

11. Halla $x, y \in \mathbb{R}$ para que $\frac{3+xi}{1+2i} = y + 2i$.
12. Halla el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $\frac{a+3i}{1+i}$ sea imaginario puro.
13. Halla $z \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{z} + w = 2 + 3i$ y $w = 3 + i$.
14. Halla $a \in \mathbb{R}$ para que $|\frac{a+2i}{1-i}| = 2$.
15. Prueba que si $|z| < 1$ entonces $|\operatorname{Re}(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$ y $|\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| < 2$.
16. Prueba que si $|z| = 2$, entonces:

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$$

17. Prueba que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, se cumple: $|\operatorname{Re}z| + |\operatorname{Im}z| \leq |z|\sqrt{2}$.
18. Expresa en forma polar y en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$3 + 3i, \quad -1 + \sqrt{3}i, \quad -1, \quad -2i, \quad -2 - 2\sqrt{3}i$$

19. Calcula: $(1 + i)^2$ y $(\sqrt{3} - i)^3$.
20. Halla las siguientes raíces:

$$\sqrt[3]{1}, \quad \sqrt[3]{i}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt{1-i}, \quad \sqrt[3]{1+i}, \quad \sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$$

21. Halla la suma y el producto de las raíces enésimas de la unidad.
22. Encuentra las soluciones de la ecuación $z^3 + 8 = 0$ que caen dentro del recinto del plano complejo definido por $|z + 1| < 2$.
23. Halla todos los complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 - |z|^2 = 0$.
24. ¿Qué curva o conjunto geométrico representa cada una de las siguientes igualdades o desigualdades?

- (a) $|z - i| = |z + i|$
- (b) $|z - 1| = 2$
- (c) $|z - 1 + 2i| = 3$
- (d) $|z - i| + |z + i| = 4$
- (e) $|z - i| < |z + i|$

(f) $0 < |z - 1| < 2$

(g) $|z - 2| + |z + 2| = 6$

(h) $||z - 2| - |z + 2|| = 2$

En los casos de igualdad, encuentra su ecuación en las variables reales x e y ($z = x + iy$).