PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA.
Curso 1º de la Ingeniería Técnica de Diseño Industrial.
Curso 2.006 − 2.007.

Temas 1, 2 **y** 3 **: LOS CUERPOS DE LOS NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS Y NOCIONES DE TOPOLOGÍA.**

1. Estudias si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son o no acotados:
   (a) $A = (1, 3)$.
   (b) $B = \mathbb{N}$.
   (c) $C = \{2, 2'2, 2'22,' 222, 2'2222, \ldots\}$.
   (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$.

2. Expresar en forma módulo-argumento cada uno de los siguientes números complejos: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 + 3i$, $z_3 = 4i$ y $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$.

3. Expresar en forma binómica los números complejos cuya fórmula módulo-argumento es la siguiente: $z_1 = 2_{\frac{\pi}{2}}$ y $z_2 = \sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$.

4. Calcular:
   (a) $\dfrac{(3 - 2i)(2 + 3i)}{3 - 4i}$.
   (b) i^{2550}.
   (c) $(1 + 4i)^3$.
   (d) $(2 - 2i)^5$.
   (e) $\lg(3 + 3i)$.
   (f) $\lg(4 + 3i)$.
   (g) $e^{(3-4i)}$.
   (h) $i^{\lg i}$.
   (i) $\lg(-1)$.
   (j) i^i.
   (k) $(2 + 2i)^{(3+4i)}$.
   (l) $\sqrt[5]{-4 + 4i}$.
   (m) $\dfrac{z_1 z_2 z_3 z_4}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}$, siendo $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$ y $z_4 = 1 - i$.

5. Sean z_1 y z_2 dos números complejos, con $z_1 \neq z_2$, tales que $\dfrac{(z_1 + z_2)i}{z_1 - z_2}$ es un número real. Hallar la ecuación que deben cumplir z_1 y z_2.

6. Hallar los números complejos z tales que:

   (a) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

   (b) $|z - 1 + i| < 2$.

   (c) $z^{10} - 2z^5 + 1 = 0$.

   (d) $z^6 + 19z^3 - 216 = 0$.

   (e) $z + \overline{z} = |z|$.

   (f) $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

7. Sean z_1 y z_2 dos números complejos con $|z_1| = 1$. Probar que:

$$|1 - \overline{z_1} \cdot z_2| = |z_1 - z_2|.$$

8. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se define $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Demostrar:

   (a) Si $z = x \in \mathbb{R}$ la expresión anterior coincide con $\cos x$ (función coseno real).

   (b) Para todo $z \in \mathbb{C}$, se verifica que $\cos z = \cos(-z)$.

   (c) Existen números complejos z tales que $\cos z = 3$.

9. Sean $1, \alpha, \alpha^2$ las raíces cúbicas de la unidad. Probar que:

   (a) $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.

   (b) $(1 + \alpha^2)^4 = \alpha$.

   (c) $(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5) = 9$.

10. Sean $a \in \mathbb{R}$. Se considera el número complejo: $z = \dfrac{3 - 2ai}{4 - 3i}$. Determinar el valor de a para que z verifique en cada caso, que:

   (a) Sea un número imaginario puro.

   (b) Sea un número real.

   (c) Esté sobre la bisectriz del primer cuadrante

SOLUCIONES:

1.

2. $z_1 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}, z_2 = 3\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}, z_3 = 4_{\frac{\pi}{2}}, z_4 = 2_{\frac{5\pi}{3}}$.

3. $2_{\frac{\pi}{2}} = 2i, \sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}} = -1+i$.

4. (a) $\frac{16}{25} + \frac{63}{25}i$.
   (b) -1.
   (c) $-47-52i$.
   (d) $-128+128i$.
   (e) $\ln(3\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   (f) $\ln(5) + (arctg(\frac{3}{4}) + 2k\pi)i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   (g) $e^3\Big(\cos(-4) + i\sin(-4))\Big)$.
   (h) $e^{-(\pi/2+2k\pi)^2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   (i) $\Big(\pi + 2k\pi\Big)i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   (j) $e^{-(\pi/2+2k\pi)}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   (k) $e^{(3\ln 2\sqrt{2}-\pi)}\Big(\cos(\frac{3\pi}{4} + 4\ln 2\sqrt{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} + 4\ln 2\sqrt{2})\Big)$.
   (l) $z_k = \sqrt[10]{32}_{\frac{3\pi/4+2k\pi}{5}}$ con $k = 0,1,2,3,4$.
   (m) $\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$.

5. $|z_1| = |z_2|$.

6. (a) $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = 2, z_5 = -1+\sqrt{3}i, z_6 = -1-\sqrt{3}i$.
   (b) $z = x + yi : (x-1)^2 + (y+1)^2 < 4$.
   (c) $z_1 = 1, z_2 = 1_{\frac{2\pi}{5}}, z_3 = 1_{\frac{4\pi}{5}}, z_4 = 1_{\frac{6\pi}{5}}, z_5 = 1_{\frac{8\pi}{5}}$, son todas raíces dobles.
   (d) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -3, z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, z_4 = 2, z_5 = -1+\sqrt{3}i, z_6 = -1-\sqrt{3}i$.
   (e) $z = |a| \pm \sqrt{3}|a|i$.
   (f) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_7 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

7.

8.

9.

10. $a = -2, a = 9/8, a = -3/14.$