Tema 4: SUCESIONES EN R.

1. Encontrar ejemplos en los que la suma de sucesiones oscilantes sea convergente, divergente u oscilante.

2. Demostrar que:

   (a) Las siguientes sucesiones son convergentes y convergen al mismo límite: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ y $b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

   (b) La sucesión $\{a_n\}$, con $a_1 > 0; a_n = \frac{1}{ne^{a_{n-1}}}, (n \geq 2)$, es convergente, y calcular su límite.

   (c) La sucesión $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots \frac{n}{n^2+n}$ es convergente.

   (d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

   (e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$.

3. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} (\cos 2n\pi)^{n^2+3n}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} n(\sin n\pi)$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left[\left(\frac{n^3+3n^2+\ln n}{n!}\right)^n\right]$

   (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}$

   (f) $\lim_{n\to\infty} \left(\tan\frac{1}{n^2+1} + \tan\frac{1}{n^2+2} + \ldots + \tan\frac{1}{n^2+n}\right)$.

   (g) $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^2+3)}$.

   (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$.

   (i) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+1}\right)^{\frac{2n^4+2}{n}}$

   (j) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$

   (k) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(\frac{n}{n-1})}$

   (l) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

(m) $\lim_{n\to\infty}\left[1+\ln(n^2-5n+8)-\ln(n^2-3n+9)\right]^{2n-7}$

(n) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-n\cos^2\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)}{2+\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)}$

4. Demostrar que las siguientes sucesiones son equivalentes:
   $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n};\ b_n = \ln n.$

5. Probar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = L$ y $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} = L$.

6. Sea la sucesión $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}, \forall n \geq 2$. Probar que es convergente y calcular su límite.

SOLUCIONES:

1.

2.

3. (a) Divergente.
   (b) 1
   (c) 0
   (d) 0
   (e) 0
   (f) 0
   (g) $e^{-1/2}$
   (h) 1
   (i) $1/e^2$
   (j) 1
   (k) 3
   (l) $4/e$
   (m) $1/e^4$
   (n) 0

4.

5.

6. límite=2.