

Tema 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

1. Calcular los siguientes límites laterales:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x-2|}; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin x}{|x|}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{|x|}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{3-\ln x}}$

2. Encontrar infinitésimos equivalentes a:

(a) $\sqrt[3]{x} \ln(1+x)$ en $x = 0$.

(b) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ si $x \rightarrow \infty$.

(c) $\sqrt{x} - \sqrt{a}$ en $x = a$.

3. En el cálculo del siguiente límite se comete un error. Encontrar tal error y hacer el cálculo correcto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0.$$

4. Calcular los siguientes límites caso de que existan:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\tan^2 x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4 + e^{\frac{1}{x}}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1})$

(e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$, con $n \in \mathbb{N}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$, con $n, m \in \mathbb{N}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)}{\ln\left(1 + \frac{x+3}{x^2+7}\right)}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$(j) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^3) \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)$$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } , x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } , x < 0 \\ 0 & \text{si } , x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } , x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$(d) j(x) = \begin{cases} x & \text{si } , x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

$$(e) k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6. Determinar los valores de m y n para los que la siguiente función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } , x \leq -\frac{\pi}{2} \\ m \sin x + n & \text{si } , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

SOLUCIONES:

1. (a) $-1, 1$.

(b) $0, 0$.

(c) $1/e^2$.

2. (a) Ejemplo: $x^{4/3}$.

(b) Ejemplo: $-1/x^2$.

(c) Ejemplo: $\frac{x-a}{2\sqrt{a}}$.

3.

4. (a) $1/e$.
(b) $1/2$.
(c) No existe. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6}{4 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6}{4 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$.
(d) $3/2$.
(e) na^{n-1} .
(f) m/n .
(g) $1/2$.
(h) 1.
(i) 1.
(j) $1/2a$.
(k) 1.
5. (a) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. $x = 1$ discontinuidad inevitable de salto finito.
(b) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. $x = 0$ discontinuidad inevitable de salto finito.
(c) Continua en \mathbb{R} .
(d) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. $x = 0$ discontinuidad inevitable de salto finito.
(e) Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. $x = -1, x = 1$ discontinuidad inevitable de salto infinito.
(f) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. $x = 0$ discontinuidad inevitable de salto infinito.
6. $m = 1/2; n = -1/2$.