TEMA 1: EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES.

1.0 – . INTRODUCCIÓN.

Al empezar un curso de Cálculo surge la polémica: ¿cómo empezar?, ¿cómo introducir los números reales? Creemos que la mejor forma de resolver este problema es dar por supuesto su existencia, ya que los alumnos los conocen y los han manejado en los niveles de estudios anteriores.

Así pues, en este tema analizaremos los números reales desde un punto de vista axiomático, enunciando sus propiedades (aritméticas, de orden y existencia de extremo superior).

Iniciaremos el tema haciendo un repaso a los distintos conjuntos de números. A continuación, enunciaremos las propiedades de los números reales que constituyen su definición axiomática. Seguidamente, definiremos la función valor absoluto y estudiaremos sus propiedades. Esta función nos será útil para introducir el concepto de conjunto acotado y estudiar los distintos tipos de intervalos que se definen en la recta real, para después, enunciar el principio de los intervalos encajados. El tema finalizará estudiando un anexo sobre las propiedades de las potencias y raíces de números reales.

1.1–. NÚMEROS NATURALES, ENTEROS, RACIONALES Y REALES.

Consideraremos conocidos los siguientes conjuntos numéricos y las operaciones algebraicas que en ellos se definen:

$\mathbb{N} = \{\text{números naturales}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, sirven para contar y ordenar.

$\mathbb{Z} = \{\text{números enteros}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, sirven para contar, ordenar y hacer balances.

$\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\} = \{\frac{p}{q} \text{ irreducible } : p, q \in \mathbb{Z}\} = \{-\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, -1, 2, \frac{11}{5}, \ldots\}$, sirven para contar, ordenar, hacer balances y hacer raciones.

$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\} = \{\text{"todos los demás"}\}$, sirven para contar, ordenar, hacer balances, hacer raciones y medir.

$\mathbb{I} = \{\text{números irracionales}\} = \{\pi, e, \sqrt{2}, \ldots\} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ se introduce $\mathbb{C} = \{\text{números complejos}\} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Entre estos conjuntos, se verifica la siguiente relación:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.2 – . **AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES.**

PROPIEDADES ARITMÉTICAS DE $\mathbb{R}$:

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con las operaciones de suma y producto usuales, es un cuerpo conmutativo; es decir, cualesquiera que sean los números reales a, b, c, se verifican las siguientes propiedades:

1. $a + b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b \in \mathbb{R}$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$.
4. $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$.
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ (-a es el opuesto de a).
6. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ (a^{-1} es el inverso de a).
7. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

PROPIEDADES DE ORDENACIÓN DE $\mathbb{R}$:

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con la relación de orden usual, es un cuerpo totalmente ordenado; es decir, cualesquiera que sean los números reales a, b, c, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
2. O bien $a < b$, o bien $b < a$, o bien $a = b$.
3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

   es decir, el orden es un orden total. Además:

4. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.
5. Si $a \geq 0, b \geq 0$, entonces $a \cdot b \geq 0$.

   es decir, el orden es compatible con la estructura de cuerpo.

1.3 – . VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL.

Dado un número real x se define su valor absoluto como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propiedades: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que:

1. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$.
3. Si $y > 0$, entonces $|x| \leq y$ si y solo sí $-y \leq x \leq y$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
5. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
7. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0)$.

1.4 – . CONJUNTOS ACOTADOS.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que A es:

acotado superiormente si existe un número real M, tal que $x \leq M$, cualquiera que sea $x \in A$

acotado inferiormente si existe un número real N, tal que $x \geq N$, cualquiera que sea $x \in A$

acotado, si lo es superior e inferiormente; esto es si existen números reales M y N tales que $N \leq x \leq M$, cualquiera que sea $x \in A$; o, lo que es lo mismo, existe un número real M tal que $|x| \leq M$ cualquiera que sea $x \in A$.

1.5 – . **INTERVALOS.**

Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ se dice que es un intervalo si verifica que: dados $x, y \in I$ tales que $x < y$, entonces $z \in I$, cualquiera que sea $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$.

Tipos de intervalos: Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

Intervalos acotados:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervalo abierto de extremos a y b.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervalo cerrado de extremos a y b.

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha de extremos a y b.

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha de extremos a y b.

Intervalos no acotados:

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ intervalo no acotado por la derecha abierto por la izquierda de extremo a.

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ intervalo no acotado por la derecha cerrado por la izquierda de extremo a.

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ intervalo no acotado por la izquierda abierto por la derecha de extremo b.

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$ intervalo no acotado por la izquierda cerrado por la derecha de extremo b.

Se tiene que además que: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

ANEXO:

Dado $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define: $x^n = x \cdot \ldots^n \cdot x$

$$x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Propiedades: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}$, se verifica que:

1. $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$.
2. $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$.
3. $x^p \cdot y^p = (x \cdot y)^p$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define: $\sqrt[n]{x}$ como el número real y tal que $y^n = x$.
Se suele denotar también como $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

Propiedades: Dados $x \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}$, se verifica que:

1. $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.
2. $x^{-1/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{x}}$.
3. $x^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$.