# TEMA 2: EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

## 2.0 – . INTRODUCCIÓN.

En el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales no tiene solución la ecuación: $x^2 + 1 = 0$, ni tampoco tienen sentido expresiones tales como: $\sqrt{-1}, (-2)^\pi, \ln(-7/2), \ldots$

Para resolver estos problemas es necesaria hacer una ampliación del concepto de número, introduciendo un nuevo elemento, $i$, que verifica la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y construyendo un nuevo cuerpo que contenga a $\mathbb{R}$ y a este elemento.

## 2.1 – . CONCEPTO DE NÚMERO COMPLEJO.

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ de pares ordenados de números reales, dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, se pueden definir operaciones suma y producto del siguiente modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

estas operaciones dotan a dicho conjunto de estructura de cuerpo. Este cuerpo se denomina cuerpo de los números complejos y se denota por $\mathbb{C}$. Así pues, un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es un par ordenado de números reales, $z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

A la primera coordenada del par se la llama parte real del número complejo, y se la denota por $Rez$.
A la segunda coordenada del par se la llama parte imaginaria del número complejo, y se la denota por $Imz$.

El número complejo $z = (a, 0)$ representa al número real $a$.

Dos números complejos son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

A los números complejos que tienen parte imaginaria no nula, se los llama números imaginarios.

A los números complejos que tienen parte real nula, se los llama números imaginarios puros.

A los números complejos que tienen parte imaginaria nula, se los llama números reales.

Se llama unidad imaginaria al número imaginario puro "más sencillo", el representado por $(0, 1)$ y se denota por $i$.

Un número complejo $z$ se puede representar en el plano por un punto $A$ cuyas coordenadas son, respectivamente, $Rez$, $Imz$. A este punto $A$ se lo llama afijo del número complejo $z$.

## 2.2 – . MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO C0MPLEJO.

Dado un número complejo $z = (a, b)$ se llama módulo del número complejo, y se denota por $|z|$, o por $m$, a la longitud del segmento $0A$, siendo $A$ el afijo de $z$. Así pues:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Adoptando en el plano como sentido positivo de giro el contrario a la agujas del reloj, se define el argumento del número complejo $z$, y se denota por $argz$, o por $\alpha$, al ángulo que forma el vector $0A$ con la parte positiva del eje $0X$. Así pues:

$$argz = arcotan\frac{b}{a}$$

Se verifica que:

$$Rez = m\cos\alpha, \quad Imz = m\sin\alpha;$$

$$m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = argz = arcotan\frac{b}{a}$$

**OBSERVACIONES**:

1-. El argumento de un número complejo, $\alpha$, está comprendido ente 0 y $2\pi$, pero éste es el menor valor, ya que también lo son $\alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \ldots$

2-. $\alpha = arcotan\frac{b}{a}$ tiene dos posibles soluciones que se diferencian en $\pi$ radianes; sabremos cual es la correcta cuando conozcamos el cuadrante en el que se encuentra el afijo del número complejo.

## 2.3 – . NÚMEROS COMPLEJOS IGUALES , CONJUGADOS Y O-PUESTOS.

Dos números complejos son iguales si tienen el mismo módulo y sus argumentos se diferencian en un número entero de circunferencias.

Dos números complejos son conjugados si tienen la misma parte real y opuesta parte imaginaria. Al conjugado de un número complejo $z$ se lo denota por $\overline{z}$. Así pues, si $z = (a, b)$, entonces $\overline{z} = (a, -b)$.

Dos números complejos son opuestos si tienen opuestas la parte real y la parte imaginaria. Al opuesto de un número complejo $z$ se lo denota por $-z$. Así pues, si $z = (a, b)$, entonces $-z = (-a, -b)$.

## 2.4 – . FORMAS DE EXPRESAR UN NÚMERO COMPLEJO.

Sea $z = (a, b)$ un número complejo de módulo $m$ y argumento $\alpha$. Se utilizan las siguientes formas para expresarlo:

FORMA CARTESIANA: $z = (a, b)$

FORMA BINÓMICA: $z = a + bi$

FORMA POLAR O MÓDULO-ARGUMENTO: $z = m_\alpha$

FORMA TRIGONOMÉTRICA: $z = m(\cos\alpha + \sin\alpha)$

## 2.5 – . OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS.

Sean $z = (a, b), w = (c, d)$ dos números complejos de módulos $m_1, m_2$ y argumentos $\alpha_1, \alpha_2$, respectivamente.

SUMA: $z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

DIFERENCIA: $z - w = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

PRODUCTO: $z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) = m_{1\alpha_1} \cdot m_{2\alpha_2} = (m_1 \cdot m_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$

COCIENTE: $\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}} = \frac{(a,b)\cdot(c,-d)}{(c,d)\cdot(c,-d)} = (\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}, \frac{-a\cdot d+b\cdot c}{c^2+d^2}) = \frac{m_{1\alpha_1}}{m_{2\alpha_2}} = (\frac{m_1}{m_2})_{\alpha_1-\alpha_2}$

POTENCIA DE EXPONENTE ENTERO: $z^n = (m_{1\alpha_1})^n = (m_1^n)_{n\alpha}$

RAÍCES DE EXPONENTE ENTERO: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{m_{1\alpha_1}} = \sqrt[n]{m_1}_{\frac{\alpha_1}{n}+2k\frac{\pi}{n}}$, con $k = 0, 1, 2, \dots n - 1$.

EXPONENCIAL DE EXPONENTE COMPLEJO: $e^z = (e^a \cos b, e^a \sin b)$

LOGARITMOS: $\ln z = (\ln m_1, \alpha_1 + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$

POTENCIAS DE EXPONENTE COMPLEJO: $z^w = e^{w \ln z}$.