TEMA 3: BREVES NOCIONES DE TOPOLOGÍA EN $\mathbb{R}$ Y $\mathbb{C}$.

3.0 – . INTRODUCCIÓN.

En este tema estudiaremos algunos conceptos relacionados con "*TOPOLOGÍA*", que es, grosso modo, la parte de la matemática que se ocupa de la clasificación de los puntos de un conjunto. En este estudio nos restringiremos a los espacios métricos.

3.1 – . ESPACIOS MÉTRICOS. DEFINICIONES GENERALES.

Definición: Dado un conjunto E, se llama distancia o métrica en E a toda aplicación:

$$d : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \in E \times E \to d(x,y) \in \mathbb{R},$$

que verifica la siguientes propiedades:

1. $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in E$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in E$. (Simetría)
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z), \forall x,y,z \in E$. (Desigualdad triangular)

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |y-x|$, es una distancia, que se conoce como distancia usual de $\mathbb{R}$. Si no se dice lo contrario, a $\mathbb{R}$ se le supondrá siempre dotado de esta distancia.
2. En $\mathbb{R}^2$: $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$, es una distancia, que se conoce como distancia euclídea.
3. En $\mathbb{R}^2$: $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$, es también una distancia.
4. Otra distancia en $\mathbb{R}^2$ es: $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|y_1-x_1|, |y_2-x_2|\}$.

Se llama espacio métrico a un par (E,d), donde E es un conjunto y d una distancia en E.

Sea (E,d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ un punto y $r \in \mathbb{R}$ un número real positivo, se definen los siguientes conjuntos:

- Bola abierta de centro x_0 y radio r: $B(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) < r\}$.
En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, $B(x_0,r) = (x_0-r, x_0+r)$, por ejemplo: $B(1,3) = (-2,4)$.

- Bola cerrada de centro x_0 y radio r: $B[x_0, r] = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$.
En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, $B[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r]$, por ejemplo: $B[1, 3] = [-2, 4]$.

- Bola abierta de centro x_0 y radio r reducida o perforada:
$B(x_0, r) \backslash \{x_0\} = \{x \in E : d(x, x_0) < r \text{ y } x \neq x_0\}$ (análogamente cerrada).
Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, $B(1, 3) \backslash \{1\} = (-2, 4) \backslash \{1\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < 3\}$.

Se llama entorno del punto x_0, a todo subconjunto A de E que contenga a alguna bola abierta de centro x_0.
En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, los entornos de un punto serán los intervalos abiertos que contengan a ese punto. Ejemplo: $(1, 5)$ es entorno de 3 porque, por ejemplo, $B(3, 1) = (2, 4) \subset (1, 5)$

Se llama entorno reducido o perforado del punto x_0, a todo conjunto de la forma: $A \backslash \{x_0\}$, siendo A un entorno de x_0.

3.2 – . CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE UN CONJUNTO.

Sea (E, d) un espacio métrico, A un subconjunto de E, $A \subset E$, y $x_0 \in E$ un punto.

Se llama complementario de A, y se denota por A^c, al siguiente conjunto: $A^c = \{x \in E : x \notin A\}$.

Se dice que x_0 es interior a A, si $\exists r > 0 : B(x_0, r) \subset A$.
Es decir, cuando x_0 está "completamente rodeado"por puntos de A.

Se llama interior de A, y se denota por $\mathring{A}$, al conjunto de los puntos interiores de A.

Se dice que x_0 es exterior a A, si $\exists r > 0 : B(x_0, r) \subset A^c$, es decir $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$.

Se llama exterior de A, y se denota por $Ext(A)$, al conjunto de los puntos exteriores de A.

Se dice que x_0 es un punto frontera de A, si $\forall r > 0 : B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$, y $B(x_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$.
Es decir, cuando no es interior ni exterior a A.

Se llama frontera de A, y se denota por $Fr(A)$, al conjunto de los puntos frontera de A.

Se dice que <u>x_0 es un punto adherente de A</u>, si $\forall r > 0 : B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.
Es decir, cuando hay puntos de A tan próximos a x_0 como queramos.

Se llama <u>adherencia de A</u>, y se denota por $\overline{A}$, al conjunto de los puntos de adherencia de A.

Se dice que <u>x_0 es un punto de acumulación de A</u>, si $\forall r > 0 : [B(x_0, r) \backslash \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.
Es decir, cuando hay puntos de A, distintos de x_0, tan próximos a x_0 como queramos.

Se llama <u>derivado de A</u>, y se denota por A', al conjunto de los puntos de acumulación de A.

Se dice que <u>x_0 es un punto aislado de A</u>, si $x_0 \in A$ y $\exists r > 0 : [B(x_0, r) \backslash \{x_0\}] \cap A = \{x_0\}$.

Se dice que <u>A es abierto</u>, si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A = \mathring{A}$.

Se dice que <u>A es cerrado</u>, si su complementario es abierto.

Se dice que <u>A es denso en E</u>, si $\overline{A} = E$.
Es decir, cuando para todo punto de E podemos encontrar un punto de A tan próximo a él como queramos.

Se dice que <u>A es acotado</u>, si $\exists x_0 \in E$ y $r > 0 : A \subset B(x_0, r)$.

Se dice que <u>A es compacto</u>, si A es cerrado y acotado (Teorema de Heine-Borel).

<u>Propiedades</u>:

1. $Ext(A), \mathring{A}$ y $Fr(A)$ forman una partición de E.
2. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$; $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
3. $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = Fr(A^c)$.
4. A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow A^c$ es cerrado $\Leftrightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset$.
5. A es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow A^c$ es abierto $\Leftrightarrow Fr(A) \subset A \Leftrightarrow A' \subset A$.
6. La unión finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

3.3 – . LA RECTA REAL AMPLIADA.

Definición: Se define la recta real ampliada, y se denota por $\overline{\mathbb{R}}$, como el siguiente conjunto:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Entornos de $-\infty$: $(-\infty, k)$ ó $(-\infty, k]$, con $k \in \mathbb{R}$.

Entornos de $+\infty$: $(k, +\infty)$ ó $[k, +\infty)$, con $k \in \mathbb{R}$.

Operaciones: Cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$, se verifica que:

1. $a \pm \infty = \pm\infty$.
2. $a \cdot (+\infty) = sig(a)(\infty); a \cdot (-\infty) = -sig(a)(\infty)$.
3. $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0; \dfrac{+\infty}{a} = sig(a)(\infty); \dfrac{-\infty}{a} = -sig(a)(\infty)$.
4. $\sqrt[n]{\infty} = \infty; \infty^n = \infty, \forall n \in \mathbb{Z}$, teniendo en cuenta los signos.
5. No tienen sentido las siguientes operaciones: $+\infty - \infty; 0 \cdot (\pm\infty); \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.