TEMA 4: SUCESIONES EN $\mathbb{R}$.

4.0 – . INTRODUCCIÓN.

El concepto de límite desempeña un papel fundamental en todo el Cálculo Infinitesimal. En este tema introduciremos este concepto de la forma más sencilla posible: la convergencia de sucesiones numéricas.

4.1 – . SUCESIONES DE NÚMEROS REALES. CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

Definición: Una sucesión de números reales es una aplicación

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \to a(n) \in \mathbb{R}.$$

Es decir, una sucesión de números reales es una colección infinita y ordenada de números reales.

A las sucesiones se las denota por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o, simplemente $\{a_n\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se acostumbra a denotar $a(n) = a_n$, y se lo llama término n-ésimo de la sucesión.

En lo que sigue consideraremos una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiciones: Se dice que un número real l es el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y se denota por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ o por $a_n \to l$, si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \epsilon.$$

Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ si: $\quad \forall M > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 \Rightarrow a_n > M.$

Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si: $\quad \forall M > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 \Rightarrow a_n < M.$

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si tiene por límite un número real l; es divergente si: $\quad \forall M > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 \Rightarrow |a_n| > M$ y, es oscilante en cualquier otro caso.

Definición: Se llama subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a toda colección infinita y ordenada de elementos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

A las subsucesiones se acostumbra a denotarlas por $\{a_{n_j}\}$.

<u>Definiciones</u>: Diremos que un número real l es un límite de oscilación de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si es el límite de alguna subsucesión suya.

Sea $E = \{$límites de oscilación de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$.

Se define el límite superior de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como el supremo del conjunto E, caso de que exista y, en tal caso, se denota por $\overline{\lim_{n\to\infty} a_n}$ o por $\lim_{n\to\infty} sup a_n$

Se define el límite inferior de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como el ínfimo del conjunto E, caso de que exista y, en tal caso, se denota por $\underline{\lim_{n\to\infty} a_n}$ o por $\lim_{n\to\infty} inf a_n$.

<u>Definiciones</u>:

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si: $\exists M \in \mathbb{R} : |a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente si: $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (estrictamente creciente si: $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$) .

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente si: $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (estrictamente decreciente si: $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$) .

La $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si: $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q > N_0 \Rightarrow |a_p - a_q| \leq \epsilon$.

4.2−. RESULTADOS RELATIVOS AL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN.

Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de números reales.

<u>Teorema 1</u>: Si existe $l = \lim_{n\to\infty} a_n$, entonces es único.

<u>Teorema 2</u>: Si existe $l = \lim_{n\to\infty} a_n$, entonces existen también $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ y se verifica que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

NOTA: puede ocurrir que existan $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, pero, si son distintos, entonces no existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.

<u>Teorema 3</u>: Toda sucesión convergente es acotada.
El recíproco no tiene porqué ser cierto, ejemplo: $\{1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$.

<u>Teorema 4</u>: Si existe $l = \lim_{n\to\infty} a_n$, entonces l es límite de todas las posibles subsucesiones de $\{a_n\}$.
Un criterio práctico para probar que una sucesión no tiene límite es encontrar dos subsuceciones suyas con distintos límites.

<u>Teorema 5</u>: Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Teorema 6: Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Teorema 7: Toda sucesión de Cauchy es convergente ($\mathbb{R}$ es completo).

NOTA: Este resultado es muy útil, pues permite analizar la convergencia de una sucesión estudiando si es o no de Cauchy y, por tanto, no se necesita conocer un candidato a límite; la comprobación se hace solo con los términos de la sucesión.

Teorema 8: Toda sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada es convergente.

Teorema 9: Toda sucesión monótona (creciente o decreciente) y no acotada es divergente.

OBSERVACIÓN: Se verifica pues que:

$$convergente \Longrightarrow Cauchy \Longrightarrow acotada.$$

Pero los recíprocos no tiene porqué ser ciertos, de hecho:
Cauchy $\Longrightarrow$ convergente, solo en espacios métricos completos ($(\mathbb{R}, |.|)$ lo es).
Acotada $\Longrightarrow$ convergente, si es monótona.

4.3-. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE SUCESIONES.

Teorema 1: Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ dos sucesiones de números reales convergentes a a y b respectivamente, es decir, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Se verifica que:

1. La sucesión $\{a_n \pm b_n\}$ es convergente y su límite es $a \pm b$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$$

2. La sucesión $\{a_n * b_n\}$ es convergente y su límite es $a * b$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(a_n * b_n\Big) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) * \Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) = a * b.$$

3. Si $b_n, b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ es convergente y su límite es $\frac{a}{b}$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

4. Si $a > 0$, entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}$ es convergente y su límite es a^b, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} = a^b.$$

5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{\lambda a_n\}$ es convergente y su límite es λa, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda a.$$

6. Si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n, \forall n \geq N_0$, entonces $a \leq b$.

Teorema 2: **Regla de Sandwich**: Sean $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ y $\{c_n\}_n$ tres sucesiones de números reales tales que:

1. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq N_0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

Entonces existe también $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y vale l, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Corolario: Si $\{a_n\}_n$, es una sucesión que converge a 0, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, y $\{b_n\}_n$ es una sucesión acotada (no necesariamente convergente), entonces la sucesión $\{a_n * b_n\}$ es convergente y su límite vale 0, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n * b_n = 0$.

4.4-. LÍMITES INFINITOS E INFINITÉSIMOS.

4.4.1-. LÍMITES INFINITOS:

Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ dos sucesiones de números reales, se verifica que:

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, entonces y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(a_n + b_n\Big) = \pm\infty$.
3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, entonces

   $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = +\infty$ si $b > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = -\infty$ si $b < 0$.

   Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, entonces

   $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = -\infty$ si $b > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = +\infty$ si $b < 0$.

4. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Big(a_n + b_n\Big) = +\infty$.

   Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Big(a_n + b_n\Big) = -\infty$.

5. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = +\infty$.

   Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = -\infty$.

   Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = -\infty$.

   Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Big(a_n * b_n\Big) = +\infty$.

4.4.2-. INFINITÉSIMOS:

Definición: Una sucensión $\{a_n\}_n$ se dice que es un infinitésimo, si: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Propiedades:

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces la sucesión $\{a_n - a\}_n$ es un infinitésimo.
2. Si dos sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ son infinitésimos, entonces las sucesiones $\{a_n + b_n\}_n$ y $\{a_n * b_n\}_n$ son también infinitésimos.
3. Si una sucesión $\{a_n\}_n$ es un infinitésimo y una sucesión $\{b_n\}_n$ es acotada, entonces la sucesión $\{a_n * b_n\}_n$ es un infinitésimo.

4.5-. CÁLCULO PRÁCTICO DE LÍMITES.

Con las sucesiones convergentes se puede operar aritméticamente, obteniéndose en general la conservación de los límites en las operaciones racionales, según se ha visto en las propiedades de los límites.

También es posible operar con los límites de sucesiones divergentes teniendo en cuenta las operaciones en la recta real ampliada, salvo que se produzcan indeterminaciones. Los principales tipos de indeterminaciones son las siguientes:

TIPOS DE INDETERMINACIONES:

1. DE TIPO SUMA: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ es una indeterminación de tipo $\infty - \infty$.

2. DE TIPO PRODUCTO: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n * b_n)$ es una indeterminación de tipo $0 * \infty$.

3. DE TIPO COCIENTE: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ es una indeterminación de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ ó $\dfrac{0}{0}$, respectivamente.

4. DE TIPO POTENCIA:

   (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ es una indeterminación de tipo 1^∞.

   (b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ es una indeterminación de tipo 0^0.

   (c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ es una indeterminación de tipo ∞^0.

Para resolver estas indetermianciones, así como para calcular otros límites, además de las propiedades aritméticas de los límites de sucesiones, se dispone de ciertos métodos de cálculo de límites, algunos de los cuales presentamos a continuación:

ALGUNOS MÉTODOS PRÁCTICOS DE CÁLCULO DE LÍMITES:

4.5.1-.Sucesiones equivalentes:

Definición: Dos sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ se dice que son equivalentes si: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, y se denota por $a_n \sim b_n$.

Proposición: Sean $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ y $\{c_n\}_n$ tres sucesiones de números reales, tales que $a_n \sim b_n$. Se verifica que:

1. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n * c_n$, entonces también existe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n * c_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n * c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n * c_n$.

2. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n}$, entonces también existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}$.

Es decir, este resultado permite sustituir una sucesión por otra equivalente en el cálculo de límites de productos y cocientes. No se puede sustituir una sucesión por otra equivalente en el cálculo de límites de sumas, diferencias, exponenciales, logaritmos,...

Recogemos a continuación una serie de sucesiones que son equivalente y son muy utilizadas en el cálculo de límites:

TABLA DE SUCESIONES EQUIVALENTES:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces:

$$\sin a_n \sim a_n$$

$$arcosin\ a_n \sim a_n$$

$$\tan a_n \sim a_n$$

$$arcotan\ a_n \sim a_n$$

$$1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, entonces:

$$\ln a_n \sim a_n - 1$$

4.5.2-. CRITERIO DE STOLZ:

Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ dos sucesiones de números reales, tales que: o bien $\{b_n\}$ es monótona divergente, o bien $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ y $\{b_n\}$ monótona.

Entonces si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ y vale L, existe también $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ y vale L.

4.5.3-.LÍMITES DE RAÍCES n-ésimas:

Si $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y vale L, entonces existe también $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y vale también L.

4.5.4-.LÍMITES DE SUMAS Y PRODUCTOS:

Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ y vale L, entonces existe también $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ y vale también L.

Si $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ vale L, entonces existe también $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 * a_2 * \ldots * a_n}$ y vale también L.

4.5.5-.LÍMITES DE TIPO EXPONENCIAL:

$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{(b_n * \ln a_n)} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n * \ln a_n}$.