TEMA 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

5.0 – . INTRODUCCIÓN.

En este tema introduciremos los conceptos de límite de una función en un punto y de continuidad de una función que serán básicos en toda la asignatura de Cálculo.

5.1 – . LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES. LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO.

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A.

Definición: Se dice que un número real l es el límite de la función f en el punto a, y se denota por $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Definiciones:
Se dice que un número real l es el límite por la izquierda de la función f en el punto a, y se denota por $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Se dice que un número real l es el límite por la derecha de la función f en el punto a, y se denota por $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Definiciones:
Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$

Análogamente se define: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Definiciones:
Se dice que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si: $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \forall x \in A, x > N \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$

Se dice que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N > 0 : \forall x \in A, x > N \Rightarrow f(x) > M.$

Se dice que $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ si: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N > 0 : \forall x \in A, x > N \Rightarrow f(x) < M.$

Análogamente se definen: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5.2-. RESULTADOS RELATIVOS AL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto en A.

Teorema 1: Si existe $\lim_{x \to a} f(x)$, entonces es único.

Teorema 2: Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ si y solo si existen los límites laterales y son iguales, en tal caso se verifica que: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

NOTA: puede ocurrir que existan $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$, pero, si son distintos, entonces no existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Teorema 3: Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y vale L si y solo si, cualquiera que sea la sucesión $\{a_n\}_n$ en A, que converja a a, se verifica que $\lim_{x \to a} f(a_n) = L$.

NOTA: Este resultado nos permite trasladar a límites de funciones todos los resultados conocidos para límites de sucesiones.

Teorema 4: Si f tiene límite finito en el punto a, entonces existe un entorno del punto a en el que f está acotada.

5.3-. INFINITOS E INFINITÉSIMOS.

Definición: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y a un punto en A.

Se dice que f es un infinitésimo en a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Se dice que f es un infinito en a si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ó $-\infty$.

Definición: Sea $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos infinitos o infinitésimos en un punto a de A.

Se dice que f y g son infinitos o infinitésimos comparables en el punto a si existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Se dice que f y g son infinitos o infinitésimos del mismo orden en el punto a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$.

Se dice que f es un infinito o infinitésimo de mayor orden que g en el punto a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Se dice que f y g son infinitos o infinitésimos equivalentes en el punto a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

5.4-. CÁLCULO DE LÍMITES.

ÁLGEBRA DE LÍMITES: Sea a un punto en A y $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real, tales que existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. Se verifica entonces que:

1. Existe $\lim_{x\to a}\Big(f(x) \pm g(x)\Big)$ y vale: $\lim_{x\to a}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$.
   Salvo: $\infty - \infty$.
2. Existe $\lim_{x\to a}\Big(f(x) * g(x)\Big)$ y vale: $\lim_{x\to a}\Big(f(x) * g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$.

   Salvo: $\pm\infty * 0$.
3. Si $g(x) \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, entonces existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y vale:

   $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$. Salvo: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y $\dfrac{0}{0}$.
4. Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ y vale: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^{\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)}$.
   Salvo: $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$.

OTROS MÉTODOS:

1. **Infinitos e infinitésimos equivalentes**:

   Si f y g son dos infinitos o infinitésimos equivalentes en un punto a, entonces, cualesquiera que sea la función $h : A \to \mathbb{R}$, se verifica que:

   $\lim_{x\to a} f(x) * h(x) = \lim_{x\to a} g(x) * h(x)$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$.
2. **Regla de Sandwich**:

   Si f, g, h son tres funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo x en un entorno del punto a, y se verifica que los siguientes límites existen y valen L: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces existe también $\lim_{x\to a} g(x)$ y vale L, es decir, $\lim_{x\to a} g(x) = L$.
3. **Producto de una función acotada por un infinitésimo** (Consecuencia de la regla de Sandwich):

   Si f está acotada en un entorno del punto a y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces existe también $\lim_{x\to a}\Big(f(x) * g(x)\Big)$ y vale 0, es decir: $\lim_{x\to a}\Big(f(x) * g(x)\Big) = 0$.

5.5 – . **CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. DISCONTINUIDADES.**

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A.

Definición: Se dice que f es continua en el punto a si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; es decir, si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Esto es, para que f sea continua en a es necesario que exista $f(a)$, exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y que este límite valga $f(a)$.

En caso contrario, se dice que f no es continuo o que es discontinua en a.

Tipo de discontinuidades:

- Discontinuidad evitable: si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero, o bien no existe $f(a)$ o bien, existiendo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- Discontinuidad inevitable: si no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Puede ser a su vez:
  - de salto finito: si existen los límites laterales pero son distintos
  - de salto infinito: si no existe alguno o ninguno de los dos límites laterales.

5.6-. RESULTADOS RELATIVOS A CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL.

Sea $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real y sea a un punto en A.

Teorema 1: f es continua en a si y solo sí, cualquiera que sea la sucesión $\{a_n\}_n$ que converge a a, se verifica que la sucesión $\{f(a_n)\}_n$ converge a $f(a)$.

Teorema 2: Si f es continua en a, entonces f está acotada en un entorno del punto a

Teorema 3: Si f y g son continuas en a, entonces las funciones $f \pm g, f * g, \dfrac{f}{g}$; siempre que $g(a) \neq 0$ y $f(x)^{g(x)}$ son también continuas en a.

Teorema 4: Si f es continua en a y g es continua en el punto $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Teorema 5 (Conservación del signo): Si f es continua en a y $f(a) > 0 (< 0)$, entonces existe un entorno del punto a tal que $f(x) > 0 (< 0)$ para todo x en dicho entorno.

Definición: f es continua en un conjunto A si lo es en todo punto a de dicho conjunto.

Teorema 6 (Teorema de Bolzano): Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en a y b, es decir: $f(a) * f(b) < 0$, entonces existe un punto $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$.

Nota 1: dicho punto c no tiene porqué ser único.

Nota 2: Es decir, existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en dicho intervalo, pero no se dice cuántas.

Teorema 7 (Teorema de Darboux de los valores intermedios): Si f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Nota: de modo análogo a como ocurre en con el resultado anterior, no se dice nada acerca de cuántas veces toma cada valor.

Teorema 8 (Teorema de Acotación): Si f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f está acotada en dicho intervalo.

Teorema 9 (Teorema de Weierstrass): Si f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo, es decir:
$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$.