Gráficos tridimensionales

Jose Luis Bravo Trinidad

9 de enero de 2013

Índice

1. Vista tridimensional
   - Coordenadas de vista
   - Transformaciones lineales
   - Proyecciones paralelas
2. Perspectiva
   - Plano proyectivo
   - Espacio proyectivo
3. Iluminación
4. El algoritmo del pintor

Coordenadas de vista

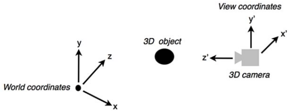


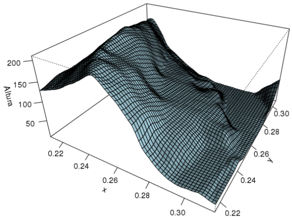
Figura: Coordenadas universales y de vista.

Para los objetos en una escena usamos el **sistema de referencia universal**.

La escena se proyecta en un plano, denominado **cámara** para lo cual se pasa al **sistema de referencia de vista**.

Este proceso se denomina **renderizado**.

Coordenadas de vista



El comando **pers** en R es un modo de realizar dicha operación.

Recibe xr, yr, zr, donde xr, yr son vectores ordenados y zr una matriz y dibuja la superficie.

Devuelve una matriz de $4x4$ que es la transformación aplicada.

Transformaciones lineales

Para transformar entre sistemas de coordenadas, utilizaremos matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslación

Para mover el punto (x_0, y_0, z_0) al origen:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -x_0 \\ 0, & 1, & 0, & -y_0 \\ 0, & 0, & 1, & -z_0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotación

Una rotación de ángulo α respecto al eje z:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha), & -\sin(\alpha), & 0, & 0 \\ \sin(\alpha), & \cos(\alpha), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotación

Una rotación de ángulo α respecto al eje x:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \cos(\alpha), & -\sin(\alpha), & 0 \\ 0, & \sin(\alpha), & \cos(\alpha), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escalado

Para multiplicar las coordenadas x por a, las y por b y las z por c,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Simetría respecto de un plano

Simetría respecto al plano $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones compuestas

Toda transformación lineal puede descomponerse en producto de transformaciones simples.

Por ejemplo, si queremos transformar el segmento $(1,1,1)$-$(1,0,0)$ para que pase a ser el segmento $(0,0,0)$-$(1,0,0)$, podemos:

1. Mover el punto $(1,0,0)$ al origen (M_1).
2. Girar -45º respecto al eje x (M_2).
3. Girar 90º respecto al eje z (M_3).
4. Escalamos el eje x el factor $1/\sqrt{2}$ (M_4).

La matriz que realiza el movimiento será:

$$M = M_4 * M_3 * M_2 * M_1$$

Proyecciones

Las **proyecciones paralelas** se obtienen al proyectar en el plano de visión cada punto en una dirección dada.

Normalmente esa dirección es la ortogonal al plano de visión.

Podemos considerar que el plano de visión pasa por el origen.

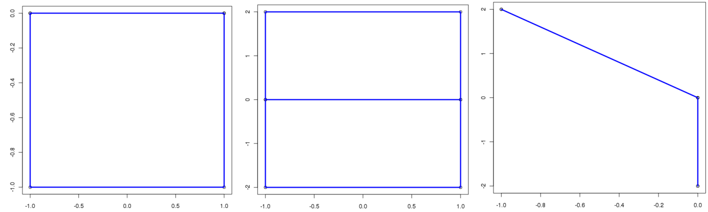
Para dar una proyección basta dar una transformación lineal (matriz) y tomar las coordenadas x, y.

Proyecciones paralelas a la normal al plano de visión

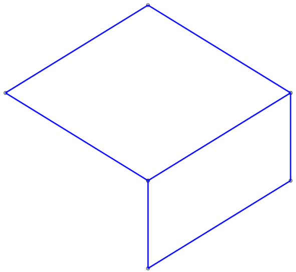
Las proyecciones paralelas son planta, alzado y perfil.

Las matrices de transformación son:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



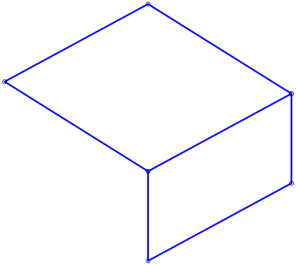
Proyección isométrica



Se elije el plano de visión de modo que la dirección ortogonal del plano de vista sea la de la recta $x = y = z$ de las coordenadas universales.

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proyección caballera



Proyección caballera: Se realiza la transformación

$$x_v = y + xL_1 \cos\phi,$$

$$y_v = z + xL_1 \sin\phi.$$

$$\begin{pmatrix} L_1\cos\phi & 1 & 0 & 0 \\ L_1\sin\phi & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plano proyectivo

El plano proyectivo se construye a partir del plano real $\mathbb{R}^2$, añadiendo los siguientes puntos: Para cada familia de rectas

paralelas, añadimos un punto. Dicho punto se denomina **punto del infinito**.
Una manera alternativa es considerar $\mathbb{R}^3$ y tomar como puntos las rectas

$$\{(\lambda x, \lambda y, \lambda z), : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Los puntos de la forma (x, y, z) se denominan **coordenadas homogéneas**.

Podemos pasar al plano afín mediante asignando a cada punto (x, y, z) del plano proyectivo el punto $(x/z, y/z)$ del plano afín.

Plano proyectivo

Se denomina **recta del infinito** a la curva del plano proyectivo definida por $z = 0$ (es una circunferencia).

Dos rectas del plano proyectivo siempre se cortan en un punto.

Si tenemos una curva (x_s, y_s, z_s) en el plano proyectivo, entonces $(x_s/z_s, y_s/z_s)$ es su parte real.

Si tenemos una curva (x_s, y_s, z_s) en el plano proyectivo, entonces $z_s = 0$ nos da sus intersecciones con el infinito.

Plano proyectivo

Consideremos la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Podemos considerarla curva del plano proyectivo haciendo $x \to x/z$, $y \to y/z$. Entonces la hipérbola en el plano proyectivo es:

$$x^2 - y^2 = z^2$$

Corta a la recta del infinito ($z = 0$) en:

$$x^2 - y^2 = 0.$$

$x^2 = y^2$, $y = \pm x$. Luego $y = \pm x$ son paralelas a las asíntotas de las parábolas (de hecho son las asíntotas).

Espacio proyectivo

Denominamos espacio proyectivo a $\mathbb{R}^4$ considerando como puntos las rectas

$$\{(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t), : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Si existe λ tal que

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2),$$

entonces (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) son el mismo punto.

Espacio proyectivo

Dado un punto (x, y, z, t) tal que $t \neq 0$, le asignamos el punto del espacio (afín) $(x/t, y/t, z/t)$.

Dado un punto (x, y, z) del espacio (afín), lo consideramos en el espacio proyectivo como $(x/t, y/t, z/t, 1)$ (coordenadas homogéneas).

Transformaciones lineales

Para definir una aplicación lineal en el espacio proyectivo, tenemos que dar una matriz de 4x4:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

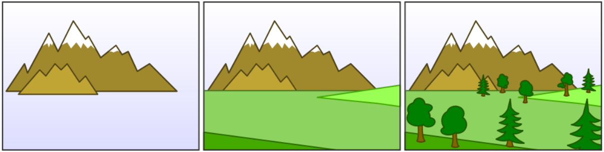
Proyección en perspectiva

Vamos a mover el plano del infinito para que esté en $x = x_\infty$ y el plano $x = x_v$ se mantenga en proporción:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_v/d & 0 & 0 & -x_v x_\infty/d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/d & 0 & 0 & x_\infty/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $d = x_\infty - x_v$.

El algoritmo del pintor



El algoritmo del pintor se utiliza para renderizar una escena definida por caras planas.

Consiste en dibujar las caras desde las más lejanas a las más cercanas.

Falla cuando tres caras se solapan de modo cíclico. Para evitar esto existen algoritmos como el de bufer z.

El algoritmo del pintor

- Se ordenan las caras de más distante a menos distante al plano de vista.
- Para cada cara (S):
    - Se compara con el resto de caras (S'), comprobando:
        - No se superpone en z,
        - No se superpone en y,
        - No se superpone en x,
        - Está detrás del plano que contiene a S',
        - No hay superposición en el plano de vista.
    - Si se cumple alguna condición se sigue con la cara siguiente.
    - Si no se cumplen, se intercambian S y S' y se vuelve a empezar.
- Se pintan las caras en el orden obtenido.