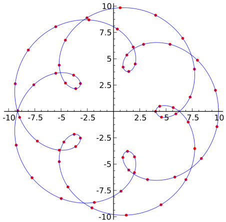
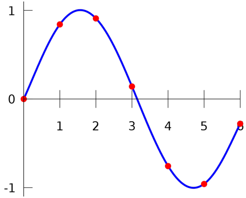
Planteamiento del problema





La **interpolación** consiste en construir una función (o una curva) que pase por una serie de puntos prefijados.

- **Interpolación polinomial**: el conjunto de datos observados se interpola mediante el polinomio de menor grado que pase por todos los puntos.
- **Interpolación a trozos (splines)** cada par de puntos consecutivos se interpola mediante un polinomio.

Planteamiento del problema

Dados los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), existe un único polinomio de grado $\leq n$, $P_n(x)$ tal que

$$P_n(x_k) = y_k, \;\; k = 0, 1, \ldots, n$$

al cual llamamos **polinomio interpolador de los puntos**.

Para calcularlo, definimos $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, e imponemos $P_n(x_k) = y_k, k = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Se prueba que el determinante es no nulo. Por tanto, el polinomio interpolador es único.

Ejemplo 1

Consideremos los puntos:

$$(0,4)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,4)$$

Tenemos que resolver el sistema:

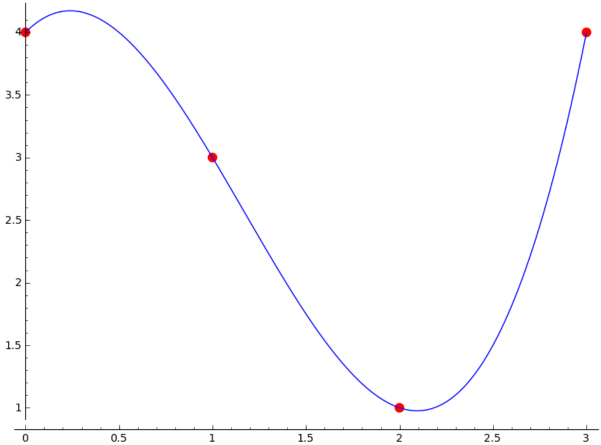
$$\left(\begin{array}{cccr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right)$$

Resolvemos y obtenemos

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=4.0+1.5\,x-3.5\,x^2+x^3.$$

Ejemplo 1

Si dibujamos el polinomio interpolador y los puntos:



Ejemplo 2

Consideremos la función

$$f(x) = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) + 4.$$

Se verifica $f(0) = 4, \quad f(1) = 3, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 4$. Por tanto su polinomio de interpolación es

$$P_3(x) = 4.0 + 1.5\,x - 3.5\,x^2 + x^3.$$

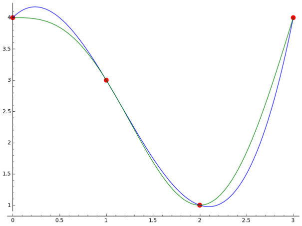


Figura: Función y polinomio

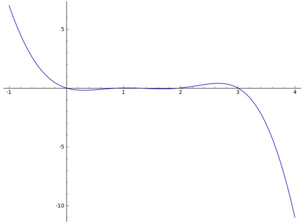


Figura: error

Polinomios de Lagrange

Dados $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, se definen los **polinomios de Lagrange** como

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$L_i(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_i, 1)$ y $(x_j, 0)$, para $j \neq i$.

El polinomio interpolador de (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) es

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$$

Polinomios de Lagrange

Consideremos los puntos:

$$(0,4),(1,3),(2,1),(3,4)$$

Tenemos:

$$L_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}, \quad L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}, \quad L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

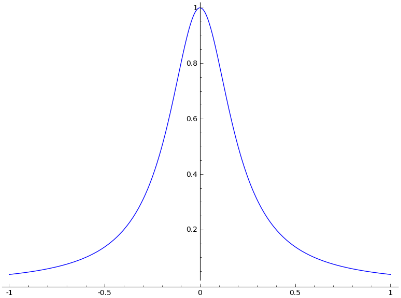
Y

$$P_3(x) = 4 * L_0(x) + 3 * L_1(x) + 1 * L_2(x) + 4 * L_3(x).$$

Efecto de Runge-Kutta

El ajuste de una curva mediante polinomios de interpolación de grado alto, esto es, para un conjunto numeroso de datos, suele resultar poco satisfactoria, pues produce oscilaciones en los extremos que llevan a graves errores (efecto Runge-Kutta). Tomemos

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \; x \in [-1, 1]$$



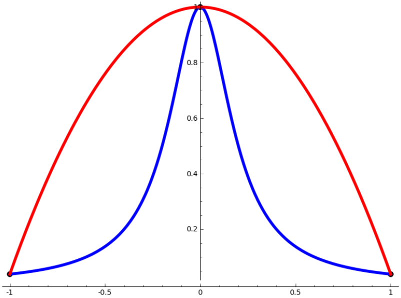
Efecto de Runge-Kutta

$f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ es la curva azul.
Tomamos los puntos

$$(-1, 0.0385), (0, 1), (1, 0.0385)$$

y calculamos el polinomio interpolador de los mismos.

$$P_2(x) = -0.9615x^2 + 1(\text{gráfica roja})$$



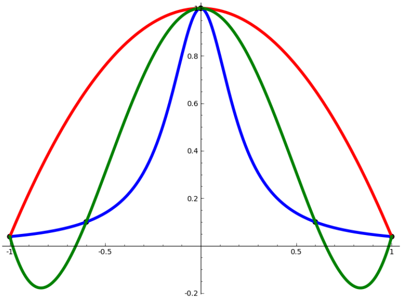
Efecto de Runge-Kutta

Tomamos más puntos para interpolar. Añadimos

$$(-0.6, 0.1), (0.6, 0.1)$$

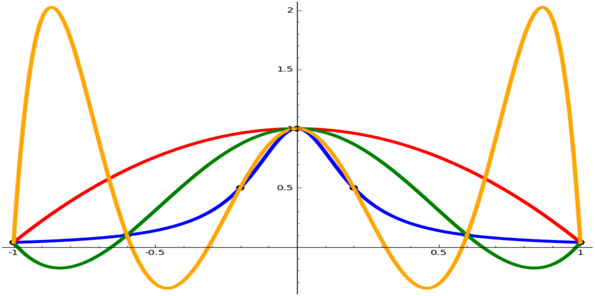
El polinomio interpolador es de grado 4:

$$P_4(x) = 2.4038x^4 - 3.3654x^2 + 1 (\text{verde})$$



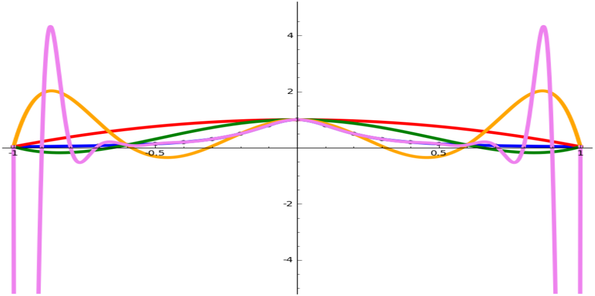
Efecto de Runge-Kutta

Tomando más puntos para interpolar, el polinomio de grado 6 se representa en la gráfica naranja. Como vemos, aparecen fluctuaciones en los extremos que hacen que el ajuste no sea adecuado, pues se producen muchos errores.



Efecto de Runge-Kutta

Para un total de 21 puntos, las fluctuaciones son enormes (el polinomio de interpolación en este caso es la gráfica violeta)



Interpolación polinomial a trozos: splines

La interpolación polinomial a trozos consiste en construir un polinomio de grado 1, 2 o 3 para cada par de nodos consecutivos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) La curva definida mediante estos "trozos" se denomina **spline**. Estudiaremos:

1. Interpolación lineal a trozos: splines lineales
2. Interpolación cúbica a trozos: splines cúbicos

Splines lineales

Consisten simplemente en unir los nodos o puntos mediante segmentos. Así, dado el par de nodos $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$, definimos el segmento que los une:

$$S_k(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), \; x \in [x_k, x_{k+1}]$$

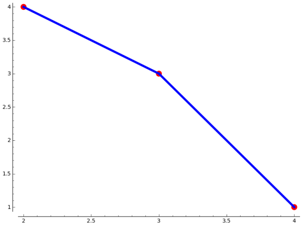
con lo que el spline lineal de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ es la función definida a trozos:

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_k, x_{k+1}], \; k = 0, \ldots, n-1$$

Splines lineales

Ejemplo 4 Queremos interpolar los puntos $(2,4),(3,3),(4,1)$. Tomamos el spline lineal:

$$s(x) = \begin{cases} -x+6 & \text{si } x \in (2,3) \\ -2\,x+9 & \text{si } x \in (3,4) \end{cases}$$



Splines cúbicos

En el caso de que busquemos una curva más suave, se impone que el spline, además de pasar por los nodos, posea primera derivada continua (no tenga “esquinas”) y segunda derivada continua, (el radio de curvatura está definido en cada punto). Se define la curva en $[x_0, x_n]$ a trozos

$$S(x) = S_k(x), x \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 0, \dots, n-1$$

donde $S_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k,\ k = 0, \dots, n-1$ Imponiendo

1. $S_k(x_k) = y_k,\ k = 0, \dots, n-1$
2. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}),\ k = 0, \dots, n-2$
3. $S_k'(x_{k+1}) = S_{k+1}'(x_{k+1}),\ k = 0, \dots, n-2$
4. $S_k''(x_{k+1}) = S_{k+1}''(x_{k+1}),\ k = 0, \dots, n-2$

Splines cúbicos

Para encontrar una solución del sistema, formado por $4n-2$ ecuaciones y $4n-4$ incógnitas, debemos imponer dos restricciones más. Según la forma de imponerlas, podemos definir distintos tipos de splines.

1. Spline cúbico natural: este spline cúbico es el que minimiza la energía de tensión.
$$S''(x_0) = 0, \quad S''(x_n) = 0.$$
2. Spline periódico:
$$S'(x_0) = S'(x_n), \quad S''(x_0) = S''(x_n)$$
3. Spline cúbico sujeto (el que menos oscila)
$$S'(x_0) = d_0, \quad S'(x_n) = d_n$$

Splines cúbicos

Ejemplo 5 Spline cúbico natural que interpola $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,1)$.

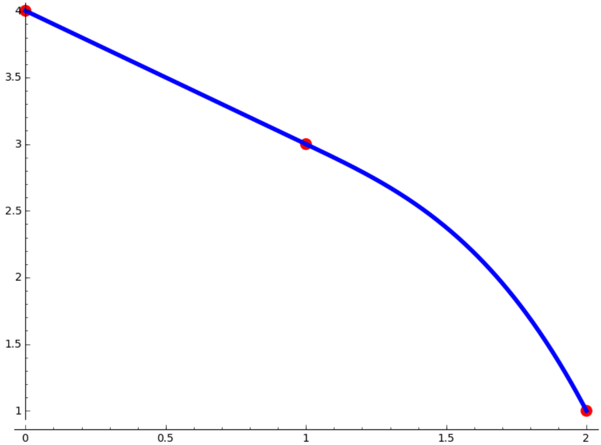
Tenemos el sistema

$$\begin{array}{r} S_0(0)=4\rightarrow \\ S_0(1)=3\rightarrow \\ S_1(1)=3\rightarrow \\ S_1(2)=1\rightarrow \\ S_0'(1)=S_1'(1)\rightarrow \\ S_0''(1)=S_1''(1)\rightarrow \\ S_0''(0)=0\rightarrow \\ S_1''(2)=0\rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ c_0 \\ b_0 \\ a_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_0(x) = 4 - x, \quad S_1(x) = 5 - 4x + 3x^2 - x^3.$$

Splines cúbicos

Ejemplo 5



Interpolación en curvas

Supongamos que tenemos una curva parametrizada:

$$(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}$$

Conocidos los puntos o nodos de la curva

$$(x(t_0), y(t_0)), (x(t_1), y(t_1)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))$$

queremos buscar una curva que pase por los mismos.

1. Interpolamos los nodos

$$(t_0, x(t_0)), (t_1, x(t_1)), \ldots, (t_n, x(t_n))$$

   obteniendo una expresión para $x(t)$

2. Interpolamos los nodos

$$(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$$

   obteniendo una expresión para $y(t)$

Interpolación en curvas

La interpolación de curvas la podemos realizar:

1. Mediante polinomios de interpolación:
    1. $x(t) = P_n(t)$
    2. $y(t) = Q_n(t)$
2. Mediante splines
3. Mediante otro tipo de interpolación: B-splines, Bézier,...

Interpolación en curvas

Ejemplo 6 Para $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$, se tienen los nodos

$$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (0,0)$$

1. Calculamos el polinomio de interpolación de $(0,1), (1,0), (2,-1), (3,0), (4,0)$, obteniendo

$$x(t) = -5/24t^4 + 19/12t^3 - 79/24t^2 + 11/12t + 1$$

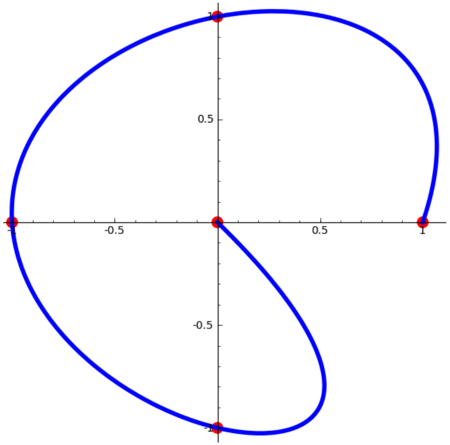
2. Calculamos el polinomio de interpolación de $(0,0), (1,1), (2,0), (3,-1), (4,0)$, obteniendo

$$y(t) = 1/3t^3 - 2t^2 + 8/3t$$

La curva definida mediante $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ es la resultante.

Interpolación en curvas

Ejemplo 6



B-splines y Bézier

Diferencias entre los B-splines y curvas de Bézier con los splines:

1. No pasan necesariamente por todos los nodos
2. Propiedad de convexidad: permanecen dentro de la envolvente convexa de los nodos
3. Al modificar un nodo de la curva, se cambia sólo una parte de la misma, esto es, tiene sólo un "efecto local".

Curvas de Bézier

Bézier ideó un método de descripción matemática de curvas que se comenzó a utilizar con éxito en los programas de CAD, aplicado en principio al trazado de dibujos técnicos, en el diseño aeronáutico y de automóviles, que empleó en la Renault. Su facilidad de uso lo ha estandarizado

- En el diseño gráfico (Adobe Flash, Corel Draw)
- En el retoque fotográfico (Photoshop)

Se basa en distinguir entre

- Puntos de anclaje o nodos, por los que pasa la curva
- Puntos de control

Curvas de Bézier

Dados los nodos

$$\mathbf{P_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La curva de Bézier para estos puntos es

$$\mathcal{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P_0} + 2t(1-t)\mathbf{P_1} + t^2\mathbf{P_2}$$

Curvas de Bézier

Dados los nodos

$$\mathbf{P_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La curva de Bézier para estos puntos es

$$\mathcal{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P_0} + 3t(1-t)^2\mathbf{P_1} + 3t^2(1-t)\mathbf{P_2} + t^3\mathbf{P_3}$$

Pasa por los puntos $\mathbf{P_0}$ y $\mathbf{P_3}$, mientras que $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ indican la dirección en la cual se mueve la curva. La tangente a la curva en $\mathbf{P_0}$ es la recta que une el segmento $\mathbf{P_0}\mathbf{P_1}$, mientras que el segmento $\mathbf{P_2}\mathbf{P_3}$ es la tangente a la curva en $\mathbf{P_3}$.

Curvas de Bézier

Ejemplo 7: Dados los puntos

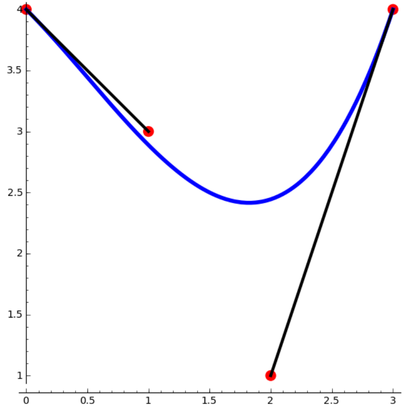
$$\mathbf{P_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

la curva de Bézier es:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^3 \cdot 0 + 3t(1-t)^2 \cdot 1 + 3t^2(1-t) \cdot 2 + t^3 \cdot 3 = 3t \\ y(t) &= (1-t)^3 \cdot 4 + 3t(1-t)^2 \cdot 3 + 3t^2(1-t) \cdot 1 + t^3 \cdot 4 \\ &= 6t^3 - 3t^2 - 3t + 4 \end{aligned}$$

Curvas de Bézier

Ejemplo 7:



Interpolación bicúbica

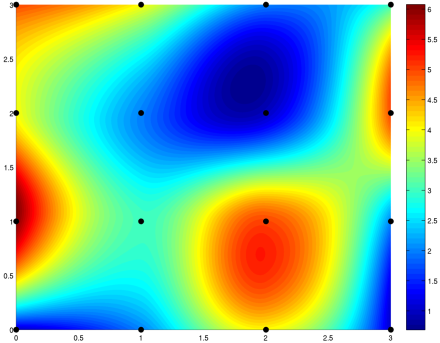
Consideramos el cuadrado unidad $(0,1) \times (0,1)$.
La **interpolación bicúbica** consiste en dar un polinomio

$$p(x,y) = \sum i = 0^3 \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j$$

de modo que se puedan fijar

- Los valores de p en los cuatro puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.
- Los valores de p_x, p_y en los cuatro puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.
- Los valores de p_{xy} en los cuatro puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

Interpolación bicúbica



- Para interpolar una superficie, se divide en rectángulos (malla rectangular y obtiene un polinómio bicúbico para cada rectángulo, imponiendo que las condiciones en los puntos compartidos por cada dos rectángulos sean las mismas.
- La interpolación con splines bicúbicos sólo se puede hacer cuando los datos esten sobre una malla rectangular.
- Produce “overshot” es decir, que los valores interpolados pueden estár por encima de los máximos permitidos (por ejemplo al reescalar imágenes.

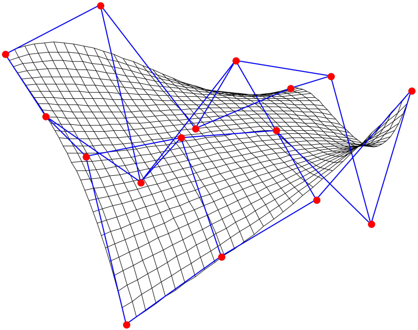
Superficies de Bezier

Consideramos el cuadrado unidad $(0,1) \times (0,1)$.
La **superficie de Bezier** consiste en dar un polinomio

$$p(x,y) = \sum i = 0^3 \sum_{j=0}^{3} a_{ij} \left(\binom{n}{i} x^i (1-x)^{3-i} \right) \left(\binom{n}{j} y^j (1-y)^{3-j} \right)$$

donde $a_{i,j}$ se denominan valores de control.

Superficies de Bezier



- Para interpolar una superficie se divide en regiones y en cada región se calcula una superficie de Bezier de modo que haya continuidad entre las regiones vecinas.
- Permite interpolación sobre una malla o sobre una triangulación.
- Es difícil usarlas directamente en renderizado, pero permiten generar triangulaciones fácilmente.