

Introducción a la Investigación en Matemática Aplicada

Jose Luis Bravo Trinidad

21 de octubre de 2016

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial:

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)\right) = 0, \quad x(t) \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

Una solución es una función $x(t)$ que verifica la ecuación.

Ejemplo: $x'(t) = x(t)$ es una ecuación diferencial y $x(t) = e^t + 2$ es una solución.

Algunos tipos especiales:

- Autónomo: $F\left(x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)\right) = 0$
- De primer orden: $F\left(t, x(t), x'(t)\right) = 0$
- Autónomo de primer orden: $x'(t) = F\left(x(t)\right)$.

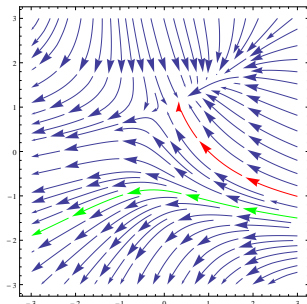
Sistemas planos

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)), \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

donde f, g son funciones dadas.

Podemos representar la ecuación como un campo de vectores:



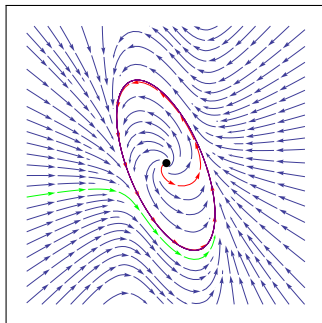
$$\begin{aligned} x'(t) &= -1 - x^2(t) + y(t), \\ y'(t) &= 1 + x(t) - y^2(t) \end{aligned}$$

Sistemas planos

- Punto singular: Soluciones de

$$\begin{cases} 0 = f(x, y), \\ 0 = g(x, y) \end{cases}$$

- Ciclo límite: Soluciones “cerradas”



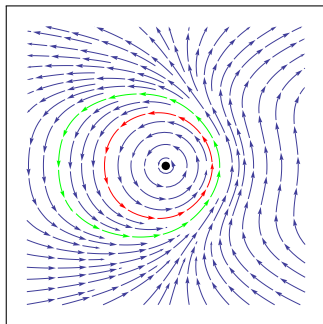
Problema 16 de Hilbert

Obtener una cota del número de ciclos límite del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)), \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$

en términos únicamente de los grados de P y Q .

Problema del centro-foco de Poincaré

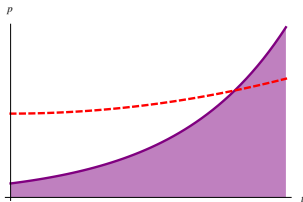


Caracterizar los sistemas polinómicos planos que tienen un centro.

Modelo de Malthus (crecimiento exponencial)

- $p(t)$ población en el instante t
- $c = n - d$ tasa de nacimientos menos defunciones

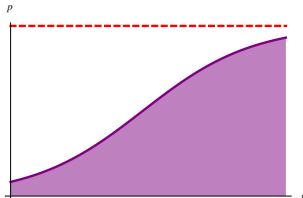
$$p'(t) = cp(t)$$



Modelo de Verhulst (ecuación logística)

- $p(t)$ población
- $c = n - d$ tasa de nacimientos menos defunciones
- K capacidad del sistema

$$p'(t) = cp(t) - \frac{c}{K}p^2(t)$$



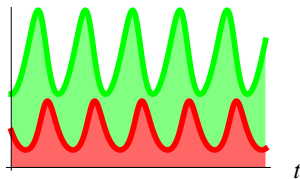
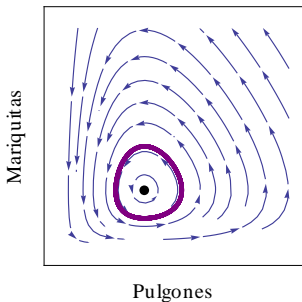
Modelo de Lotka-Volterra (depredador-presa)

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy, \\ y' = -Cy + Dxy \end{cases}$$



Figura: Depredador y presa

Modelo Lotka-Volterra (depredador-presa)



Un modelo de Gause

Consideremos

- $x(t)$ la población de la presa
- $y(t)$ la población del predador
- $F(x)$ crecimiento de la presa en ausencia del predador
- $\phi(x)$ tasa de caza del predador
- $\psi(x)$ rendimiento de la caza
- μ tasa de defunción del predador

$$\begin{cases} x' = F(x) - y\phi(x), \\ y' = y(\psi(x) - \mu) \end{cases}$$

donde $F(x) = rx(1 - x)$, $\phi(x) = \psi(x) = x^{1/2}$, $k, r, \mu > 0$.

Estudio cualitativo

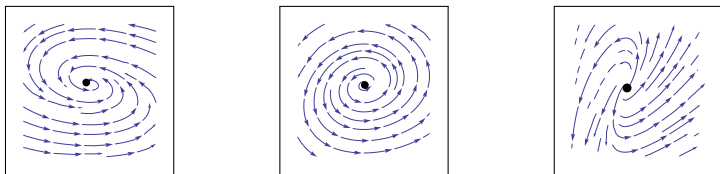


Figura: Estabilidad del punto crítico

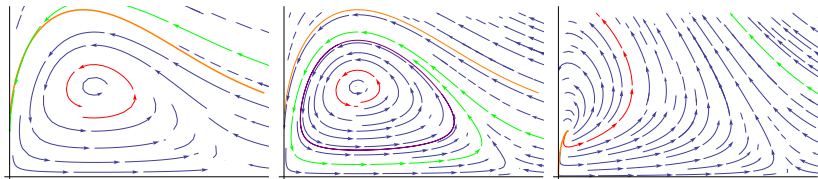
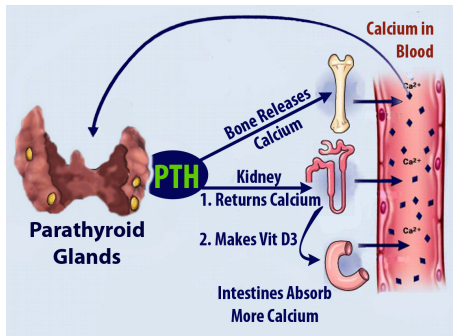


Figura: Dinámica global

Control del calcio iónico mediante la PTH



Modelo (muy) simplificado

Hipótesis de trabajo:

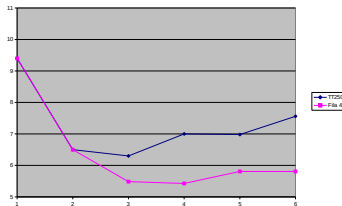
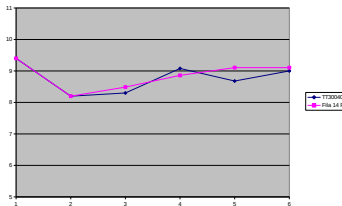
- La parte lineal domina la dinámica
- Se puede despreciar la difusión
- No es necesario considerar la vitamina D
- El calcio siempre vuelve al mismo nivel

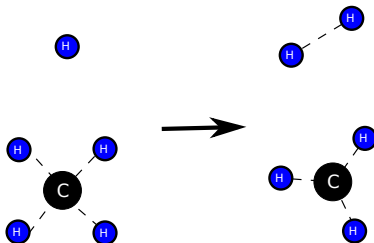
Modelo:

- $C(t)$ concentración de calcio iónico en sangre
- $P(t)$ concentración de PTH en sangre
- C_0 nivel de equilibrio del calcio iónico

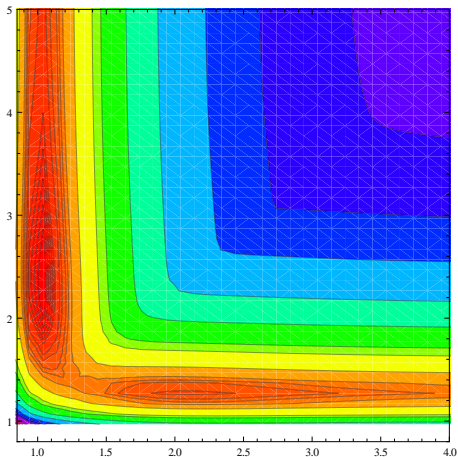
$$\begin{cases} C'(t) = a(C(t) - C_0) + bP(t), \\ P'(t) = d(C(t) - C_0) \end{cases}$$

Resultados obtenidos





Energía potencial



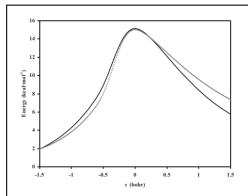
Modelo de PES (LEPS)

$$\begin{aligned}
 & \frac{0,03812}{2} (D1HH(e^{-2\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x1)^2 + (-y0+y1)^2 + (-z0+z1)^2})} \\
 & - 2e^{-\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x1)^2 + (-y0+y1)^2 + (-z0+z1)^2})} \\
 & + D3HHe^{-2\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x1)^2 + (-y0+y1)^2 + (-z0+z1)^2})} \\
 & + 2e^{-\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x1)^2 + (-y0+y1)^2 + (-z0+z1)^2})})) \\
 & + \frac{1}{2} (D1HH(e^{-2\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x2)^2 + (-y0+y2)^2 + (-z0+z2)^2})} \\
 & - 2e^{-\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x2)^2 + (-y0+y2)^2 + (-z0+z2)^2})}) + \\
 & D3HH(e^{-2\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x2)^2 + (-y0+y2)^2 + (-z0+z2)^2})}) + \\
 & 2e^{-\alpha HH(-ReHH + \sqrt{(-x0+x2)^2 + (-y0+y2)^2 + (-z0+z2)^2})})) + \dots
 \end{aligned}$$

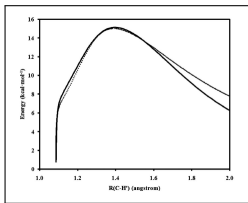
Optimización

Se introduce en la optimización:

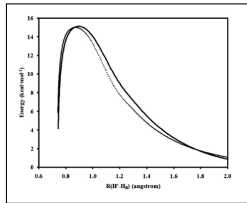
- Energías
- Gradientes
- Frecuencias (Hessiana)



: en distancia de enlace C-H



: en camino de reacción



: en camino de reacción H-H

Figura: Comparación de la energía obtenida

Automatización



Figura: Cosechadora de fresas

Automatización

