Guía extensa de los contenidos de la asignatura Análisis Matemático I

Yolanda Moreno Salguero

Índice general

CAPíTULO 1

La recta real

Preliminares sobre conjuntos ordenados: Definición de relación de orden. Conjuntos acotados. Extremos de un conjunto.

Conjuntos de números: Los números naturales. Los números enteros. Los números racionales: Los números racionales son un cuerpo ordenado; densidad del orden de $\mathbb{Q}$; representaciones decimales finitas; representación de los racionales en la recta.

Los números reales: Deficiencias de $\mathbb{Q}$. Definición axiomática de los números reales. Algunas consecuencias de los axiomas: propiedad arquimediana, parte entera, densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$ (la recta está completa). Representación decimal de los números reales: aproximaciones decimales finitas de un número real.

Nociones sobre la topología usual de la recta real: Valor absoluto y propiedades. Intervalos. Distancia entre dos puntos. Entorno de un punto. Punto de acumulación. Punto aislado.

Objetivos

- Enseñar al alumno a distinguir los diferentes conjuntos de números por sus propiedades algebraicas y de orden.
- Hacerle ver el proceso de construcción de los conjuntos de números, y que éste se realiza bajo el criterio de satisfacer las necesidades de resolver ecuaciones y representar por tanto la realidad.
- Entender la recta real como la interpretación geométrica de los números reales y comprender, hasta donde es posible, el significado de ser completa y de que representa un conjunto no numerable totalmente ordenado.
- Entender la noción de entorno de un punto que formaliza la idea de "estar en las proximidades de un punto".
- Mostrar que la función valor absoluto permite expresar la noción de distancia y describir los entornos de un punto.

1. Introducción

Los números se usan para expresar cantidades: distancias, riqueza, peso, ... En definitiva, para medir. Y una vez obtenidas las medidas con ellas haremos cálculos. Y para ello necesitaremos resolver ecuaciones. Sin embargo, a la hora de hacer el más sencillo de los cálculos o medir distancias, el conjunto de los números naturales, que es el que intuitivamente conocemos, presenta graves carencias: la más sencilla de las ecuaciones difícilmente se resolverá con número naturales. Se precisa pues ampliar este conjunto y dar cabida a "más números". Las distintas ampliaciones que históricamente se han ido obteniendo (enteros, racionales) servían para satisfacer las necesidades en cada momento y fallaban al aparecer otras nuevas (es decir, resolvían unas determinadas ecuaciones y funcionaban muy bien hasta que aparecía una ecuación nueva que no se podía resolver). El proceso continúa hasta llegar al conjunto de los números reales Este conjunto, a pesar de la complejidad del proceso de construcción, satisfará "casi" todas nuestras necesidades.

Es difícil entender qué son los números reales si no es a través de un proceso constructivo partiendo del conjunto más elemental: el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Desde este punto de vista, la comprensión de la noción de recta real y del proceso de construcción de los números reales pasa por entender dos aspectos fundamentales de los conjuntos de números:

- Que lo que necesitamos conocer de los números es el orden entre ellos y cómo se opera con ellos (cómo se suman, se multiplican,...). Es decir, dar un conjunto de números es dar un orden y una estructura algebraica (de alguna forma compatibles).
- Que ayuda bastante disponer de una representación para los números de modo que en la práctica se puedan manejar con comodidad.

Comenzando pues el proceso con los números naturales, aceptamos que básicamente se trata de un conjunto con unas determinadas propiedades algebraicas y de orden, y que "el 1, el 2, el 3,..." no es otra cosa que una representación sencilla y operativa de los elementos de dicho conjunto.

Se tienen ahora dos caminos posibles para llevar a cabo el proceso de construcción de los números reales, ninguno exento de peligros:

- El primero es ir introduciendo los nuevos "números" a partir de los ya conocidos, comprobando a continuación que dichos elementos verifican las propiedades algebraicas y de orden que deseamos. Sin embargo, seguir esta via supone toparse con nociones como la de sucesión de Cauchy, nada fácil de digerir, especialmente al principio del curso.
- La otra opción es definir cada conjunto de números de forma axiomática de modo que quede descrito precisamente por sus propiedades algebraicas y de orden; queda a continuación encontrar una representación suficientemente buena de sus elementos. El inconveniente en este caso surgirá a la hora de representar los números reales.

Esta última forma, axiomática, de dar los conjuntos de números es en cierto modo más natural, porque los conjuntos quedan definidos según sus propiedades, que son las que realmente interesan. Además, en el caso de los naturales, enteros y racionales no cuesta admitir que las representaciones clásicas (1,2,3... para los naturales; los mismos, el 0 y los mismos con signo "menos" delante para los enteros; y las fracciones con enteros para los racionales) son representaciones plenamente satisfactorias, tanto conceptualmente como en la práctica. En el caso de los reales optaremos por una salida negociada: dar una representación digna a través de desarrollos decimales. La dificultad de usar esta representación en la práctica es clara: ¿cómo sumar y multiplicar desarrollos decimales infinitos? Sin embargo, las dificultades que se presentan a la hora manejar las representaciones decimales no son mayores que las que surgen con la definición de los reales mediante clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales (cierto que una vez visualizado un número real como clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy, definir las operaciones apartir de ahí no presenta mayor dificultad). Simplemente, son dificultades de diferente naturaleza. .

De cualquier modo, conviene no olvidar que nada cambia el hecho de que se conocen muy pocos números reales no racionales; y que los pocos que se conocen, $\sqrt{2}$, π ó e tienen entidad propia y no "son" ni desarrollos decimales infinitos ni clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.

2. Preliminares sobre conjuntos ordenados

Supongamos que X es un conjunto no vacío. Sea $P(x, y)$ una proposición con dos variables. Una relación binaria, que podemos denotar R en X se define como sigue: dos elementos $x, y \in X$ están relacionados según R si la proposición $P(x, y)$ es verdadera. En ese caso, escribiremos xRy.

Hay dos tipos de relaciones binarias muy interesantes en matemáticas: las de equivalencia o igualdad, y las de orden.

Las de equivalencia o igualdad son las que tienen las propiedades reflexiva (para todo $x \in X$ se tiene xRx), simétrica (si xRy entonces yRx) y transitiva (si xRy y yRz entonces xRz) y antisimétrica (si xRy y yRx entonces $x = y$). Es lo que le ocurre a la relación de igualdad habitual.

2.1. Relación de orden. Una relación binaria R en un conjunto X se dice que es una relación de orden si verifica las propiedades reflexiva, transitiva y antisimétrica (si xRy y yRx entonces $x = y$). Lo que le ocurre a la relación de orden habitual.

Si además la relación R cumple que, dado cualquier par de elementos $x, y \in X$, o bien xRy o bien yRx entonces decimos que R es un *orden total*. La notación habitual para un orden es $\leq$ en lugar de R. Si escribimos $x \leq y$ leemos que x es menor o igual que y; escribimos $x < y$ para indicar que $x \leq y$ y $x \neq y$ y decimos que x es menor que y.

Ejercicios.

1. La inclusión habitual es un orden parcial (es decir, no total) en el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de todos los subconjuntos de A, llamado *partes de A* .
2. El orden natural entre los naturales, enteros y racionales es total.
3. Definamos en $\mathbb{R}^2$ la relación $(a, b) \preceq (c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$. ¿Es una relación de orden? ¿Es total?

2.2. Conjuntos acotados y extremos. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado e $Y \subset X$ un subconjunto no vacío. Decimos $z \in X$ es una cota superior (resp. inferior) de Y si para todo elemento $y \in Y$ se tiene $y \leq z$ (resp. $z \leq y$). En caso de existir cota superior diremos que Y está acotado superiormente (resp. inferiormente).

Si Y es un subconjunto acotado superiormente (resp. inferiormente) se denomina *supremo* (resp. *ínfimo*) a la menor (mayor) de las cotas superiores (inferiores). Si existe el supremo a de Y y pertenece a Y se dice que a es el *máximo* de Y. Veremos en su momento que la existencia de extremos para cualquier subconjunto acotado de la recta real es la diferencia fundamental entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.

Ejercicios.

1. Poner, si es posible, un ejemplo de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado con dos máximos.
2. Poner, si es posible, un ejemplo de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado que esté totalmente ordenado.
3. Poner, si es posible, un ejemplo de un subconjunto de un conjunto toalmente ordenado que no esté totalmente ordenado.
4. Poner, si es posible, un ejemplo de un conjunto con un orden total, acotado superiormente, pero sin máximo.

3. Conjuntos de números

Nuestra intención en esta sección es definir, axiomáticamente como ya hemos dicho, el conjunto de los números naturales para, a partir de ahí, realizar sucesivas ampliaciones hasta llegar a los números reales.

3.1. Los números naturales. Ya decía Klein que Dios nos había dado los números naturales y nosotros habíamos inventado lo demás. Con todo, aunque admitamos que tenemos una intuición suficientemente buena del conjunto de los números naturales (son los que usamos para contar), vamos a optar por hacer una breve exposición axiomática con la intención de poner de manifiesto que, en general, lo que nos importará de un conjunto no es tanto lo que sus elementos "son" como "lo que hacen". Nos referimos, claro está, a la estructura algebraica, y de orden que ese conjunto incorpora en su definición. Por ejemplo, es importante (y sorprende en primera instancia) observar que lo que en verdad distingue a $\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$ no es la descripción explícita que conocemos de sus elementos (a saber, para obtener los segundos se añade a los naturales el 0 y de nuevo los naurales con un signo menos), sino las diferencias entre sus estructuras algebraicas y propiedades de orden. Así pues, al comenzar con la definición axiomática de números naturales damos la oportunidad de reconocer que los números de contar están completamente definidos por las propiedades de orden que poseen.

Se denomina conjunto de los *números naturales* a un conjunto dotado de una relación de orden total $\leq$ y que además verifica los siguientes axiomas:

1. Existe un elemento en el conjunto que es más pequeño que todos los demás; lo llamamos *mínimo* del conjunto y lo denotamos 1.
2. Cada elemento del conjunto tiene *un sucesor*; es decir, dado x hay un elemento $x' \neq x$ tal que para cualquier $x \leq y \leq x'$, o bien $y = x$ o $y = x'$ (el sucesor es obviamente único).
3. Todo subconjunto del conjunto dado que contenga a 1 y al sucesor de cada uno de sus elementos, coincide con él.

El conjunto de los números naturales se denotará por $\mathbb{N}$. El mínimo, ya hemos dicho, lo denotaremos por 1, su sucesor será 2, el sucesor de éste será 3 y así sucesivamente.

Las operaciones *suma* y *producto* usuales sobre $\mathbb{N}$ tienen las propiedades conmutativa y asociativa, el producto se distribuye entre la suma y existe elemento unidad para el producto.

Haremos alguna práctica sobre el axioma tercero, nada trivial, sobre el que se basa el *razonamiento por inducción.*

Ejercicios.

1. Poner, si es posible, un ejemplo de conjunto que cumple los axiomas 1 y 2 pero no 3.
2. Poner, si es posible, un ejemplo de conjunto que cumple los axiomas 2 y 3 pero no 1.
3. Poner, si es posible, un ejemplo de conjunto que cumple los tres axiomas y además tiene máximo.

3.2. Los números enteros. El cálculo económico más sencillo, lamentablemente, nos muestra que los naturales no bastan para describir la realidad. Para ello, poder resolver ecuaciones del tipo $x + 3 = 2$, es por lo que se precisa ampliar $\mathbb{N}$. Se necesita un elemento neutro para la suma (0) y la existencia de elemento opuesto (es decir, poder resolver la ecuación $x + y = 0$). Así que lo que haremos es añadir dichos elementos, que faltaban en $\mathbb{N}$. El conjunto resultante se denomina conjunto de los números enteros y se denota $\mathbb{Z}$. Con 0 denotamos al elemento neutro y con $-n$ el opuesto del natural n.

Ejercicio: las operaciones en Z. Vamos a definir las operaciones en $\mathbb{Z}$

1. Probar que $- - n = n$
2. Necesariamente $(-n) + (-m) = (n + m)$.
3. Un entero k se dice positivo si $0 \leq k$ y negativo si $k \leq 0$. Probar que si k es positivo $k(-m) = -km$ y si $-k$ es negativo $(-k)(-m) = km$
4. El producto en $\mathbb{Z}$ sigue teniendo como elemento neutro el 1: es decir, $k1 = 1k = k$.

El orden en $\mathbb{Z}$ también amplía de modo natural el orden de $\mathbb{N}$. Graficamente, será:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

1. Definir explícitamente el orden de $\mathbb{Z}$.
2. ¿En qué se diferencia el orden de $\mathbb{Z}$ del de $\mathbb{N}$?

En conjunto, hemos obtenido una ampliación $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3.3. Los números racionales. No importa si es para medir o para contar, fácilmente nos encontraremos con "la mitad de ..." o "las tres cuartas partes de ...". Así pues, la necesidad de resolver ecuaciones del tipo $3x = 5$ nos obliga a ampliar de nuevo el conjunto de los números enteros. Ya que un elemento neutro para el producto se tiene, el 1, lo que falta es poder resolver la ecuación $zx = 1$, con z entero distinto de 0. En términos formales, necesitamos obtener el inverso de z. Procedemos como antes y para cada $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ añadimos el número inverso de z) y que se denotará por $1/z$. De este modo, tendrá sentido una expresión de la forma a/b con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$: $a/b = a(1/b)$.

Una consideración que no apareció al hacer la ampliación $\mathbb{Z}$ aparece ahora: cada vez que en matemáticas se introduce un objeto cualquiera, hay que decir también cuál será la noción de igualdad para esos objetos. Con $\mathbb{Z}$ no hubo dificultades en ese punto (repasar por qué). Ahora, sin embargo, si queremos que los nuevos números sean fracciones p/q precisamos decir cuándo dos fracciones p/q y p'/q' van a ser iguales (o equivalentes, si a uno le molesta que la igualdad se defina):

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Longleftrightarrow pq' = qp'.$$

Con esta noción de igualdad, el inverso de un número entero es único. El conjunto que resulta de añadir a los enteros no nulos sus inversos, todo bajo la noción de igualdad anterior, se denomina conjunto de los números racionales. De las muchas formas en las que un número racional se puede expresar, aquella p/q en la que p y q no tienen factores comunes es única. Se denomina forma irreducible. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ y puede describirse del siguiente modo:

$$\mathbb{Q}\left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \;\; p/q \;\text{ irreducible}\right\}.$$

Ejercicio. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ en la forma $k = k/1$.

El orden de $\mathbb{Z}$ se extiende naturalmente a $\mathbb{Q}$ del siguiente modo $p/q \leq p'/q'$ cuando $p'q \leq q'p$. Lo mismo ocurre con las operaciones suma y producto:

- $\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb+qa}{ab}$
- $\frac{p}{q}\frac{a}{b} = \frac{pa}{qb}$

Ejercicio. Comprobar que la suma y producto en $\mathbb{Q}$ y la noción de igualdad para fracciones son compatibles. Además, estas operaciones son compatibles con la relación de orden en el siguiente sentido: si $s, w \in \mathbb{Q}$,

- Si $s \leq w$ entonces $s + r \leq w + r$ para cualquier $r \in \mathbb{Q}$.
- Se $s \leq w$ y $r \geq 0$ entonces $sr \leq wr$.

Para quien conozca el lenguaje, el conjunto $\mathbb{Q}$ dotado de las operaciones suma y producto usuales es un cuerpo conmutativo y totalmente ordenado.

Ejercicio.

1. Tiene $\mathbb{Q}$ primer elemento?
2. Y sucesores?
3. *El orden de $\mathbb{Q}$ es denso*: dados $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$ hay $w \in \mathbb{Q}$ tal que $r < w < s$.

3.4. Representación geométrica de los números racionales. Recordemos que uno de los objetivos que perseguiamos con los números era poder medir. Podemos pues plantearnos: ¿cuánto hemos mejorado con las distintas ampliaciones que hemos realizado? Lo que quiera que haya pasado hasta ahora debería satisfacer nuestra necesidad de representar con números longitudes: la longitud de un trozo de recta o la distancia entre dos puntos señalados en una recta.

Los números naturales miden una longitud dada, que llamamos 1, y luego el doble, triple, etc. Podemos "señalar" pues los números naturales en la recta con su orden natural: y los dibujamos de modo que determinen segmentos de igual longitud, desde el 1 hacia la derecha. Después añadimos el 0 a la izquierda del 1 rspetando el intervalo marcado y luego los restantes enteros a intervalos de igual longitud hacia la izquierda. Los que se encuentran a la izquierda del 0 son los negativos y a la derecha los positivos. Finalmente, representamos los racionales (puntos medios, puntos medios de los puntos medios ... tercera parte y sus múltiplos, quinta parte y sus múltiplos,...). De este modo, los puntos de la recta que representan racionales están "cada vez" más cerca unos de otros. ¿"Rellenan" los racionales toda la recta? La respuesta en la próxima sección 4.

3.5. Representaciones decimales finitas. Un número racional de la forma

$$q = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, \ldots, n$, se expresa usualmente en la forma

$$r = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n.$$

A esta representación se le llama representación decimal finita de q. Es obvio que no todo número racional admite una representación decimal como la anterior; si $1/3$ tuviese una representación decimal finita, entonces para algún $n \in \mathbb{N}$ la ecuación $3x = 10^n$ tendría solución en $\mathbb{Z}$, que no es posible ya que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10.

Hemos introducido la noción de representación decimal finita con el propósito de dotar de sentido la representación los números reales como números "decimales" arbitrarios, que definiremos en la siguiente sección.

4. Introducción de los números reales

4.1. Las deficiencias de $\mathbb{Q}$. Hemos ido ampliando sucesivamente los conjuntos de números a medida que se han ido mostrando insuficientes para resolver ciertas ecuaciones que la medida de magnitudes plantea. En el caso de los números racionales nos encontramos con el siguiente problema: queremos determinar el número x que mide la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es la unidad de longitud. El teorema de Pitágoras dice que la ecuación que debemos resolver es:

$$x^2 = 2.$$

Veamos que ningún número racional puede ser solución de dicha ecuación: puesto que x se representa como xz/t con z y t dos números enteros, $t \neq 0$, debe verificarse

$$z^2 = 2t^2.$$

Hagamos la descomposición en factores primos (suponemos conocido del curso de Álgebra que la descomposición en factores primos de un natural es única) de los dos miembros de la ecuación. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los dos miembros de la ecuación no tienen divisores comunes. Ahora bien, puesto que z^2 es par, también lo es z (simple ejercicio), de donde se sigue que t debe ser también par; pero esto contradice el hecho de que z y t no tienen divisores comunes.

El mismo problema se generaliza al caso de raíces n-ésimas.

Otra "deficiencia"que se presenta en $\mathbb{Q}$ tiene que ver con la relación de orden: el conjunto $M = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$, que está acotado superiormente por 2, no tiene una cota superior mínima (supremo)! Tal vez sea más evidente que fácil, pero como estamos empezando, hagamos la demostración formal explícita: En efecto, si s fuese el supremo de M tenemos dos posibilidades:

1. Si $s \in M$: entonces $(s + h) \in M$, tomando $0 < h < \sup\{(2 - s^2)/(2s + 1), 1\}$, lo que supone una contradicción.
2. Si $s \notin M$: entonces $s^2 > 2$ (pues ya hemos visto que ningún racional tiene cuadrado igual a 2) y $(s - h)^2 > 2$, tomando $0 < h < (s^2 - 2)/2s$, luego para todo $q \in M$, $q^2 < (s - h)^2$ y por tanto $q < s - h < s$, de nuevo una contradicción.

Con el ejemplo anterior acabamos de probar que existen conjuntos no vacíos en $\mathbb{Q}$ acotados superiormente que no tienen supremo. Suplir esta carencia supone resolver el problema que planteábamos anteriormente de resolver la ecuación $x^2 = 2$. De hecho, de la existencia del supremo de todo conjunto acotado superiormente se deduce que dados dos racionales cualesquiera $p < q$ existe un número racional r $p < r < q$, lo que a su vez nos permitirá obtener aproximaciones racionales a "$\sqrt{2}$".

4.2. Definición axiomática de los números reales. Lamentablemente, no es posible dar una definición de número real a un bajo coste. Si optamos por dar una definición constructiva de los números reales a partir de los racionales, necesitamos la noción de sucesión de Cauchy, que desconocemos por el momento. Siendo coherentes con lo que hemos hecho hasta ahora, resulta más práctico y económico –en términos de esfuerzo para el alumno– identificar el conjunto de los números reales con aquel que contiene algebraicamente a los racionales y a los supremos de los conjuntos acotados de racionales. El coste de esta elección estará sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en las ampliaciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, en la tarea de encontrar una representación de los elementos del nuevo conjunto que sea compatible con la dada para números racionales.

Definición axiomática del conjunto de los números reales El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es aquel que verifica los siguientes axiomas:

1. $\mathbb{R}$ tiene estructura de cuerpo.
2. $\mathbb{R}$ está dotado de una relación de orden total y compatible con la estructura de cuerpo.
3. Todo conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Los temas de discusión aquí, que si bien no evitamos sí abordamos con espíritu pragmático, son los siguientes:

1. Que los axiomas anteriores definen un único conjunto, y en qué sentido es único.
2. Que si tenemos disponible una representación concreta asequible; va incluido que podamos ver $\mathbb{Q}$ como parte de $\mathbb{R}$.
3. En particular, que pasamos de añadir a $\mathbb{Q}$ los supremos de sus conjuntos acotados para a continuación pedir en los axiomas que los supremos de los conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ también estén; ¿serán los mismos?
4. ¿Qué pasa, según la representación que demos para $\mathbb{R}$ con la "estructura métrica" habitual?

Algunas propiedades de los números reales

◦ *Propiedad arquimediana.* Para todo par $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe un número natural n tal que $y < nx$. Geométricamente, esta propiedad dice que todo segmento puede ser recubierto por una cantidad finita de segmentos de igual longitud (cualquiera que esta sea).

◦ *Parte entera de un número real.* Gracias a la propiedad arquimediana de los números reales y al axioma del supremo se tiene que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un número entero z tal que $z \leq y < z + 1$. Al número entero z se le denomina parte entera de y.

◦ *Densidad de $\mathbb{Q}$ (y del complementario) en $\mathbb{R}$.* El complementario de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se denomina conjunto de los números irracionales y se denota por $\mathbb{I}$. Se tiene que:

Para todo par de números reales $\alpha < \gamma$ existen $q \in \mathbb{Q}$ y $\xi \in \mathbb{I}$ tales que $\alpha < q < \gamma$ y $\alpha < \xi < \gamma$.

El racional q existirá gracias a la propiedad arquimediana, así $q = ([n\alpha] + 1)/n$, para $n > 1/(\gamma - \alpha)$. La existencia del irracional ξ se sigue del axioma del supremo; $\xi = \alpha + \sqrt{2}(\gamma - \alpha)/2$.

Como consecuencia, se obtiene que *todo número real es el supremo de todos los racionales que son menores o iguales que él.* Este resultado nos proporciona una visión algo más concreta del conjunto de los números reales como ampliación de $\mathbb{Q}$; hemos añadido a los racionales todos los supremos.

4.3. Representación decimal de los números reales. Comencemos observando que si no hacemos las cosas mal, medir con los nuevos números reales que aparecen con el axioma del supremo es bastante natural: si, por ejemplo $E = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ entonces es claro que se pueden elegir racionales r_n tales que $r_n < E < r_n + \frac{1}{n}$; lo que significa que aproximan E tanto como se quiera. De modo que una distancia E significa una distancia que siempre mayor que r_n y menor que $r_n + \frac{1}{n}$. Puede costar un poco habituarse, pero no más que a decir que una distancia es $\frac{3}{5}$. Además, todo número real se puede aproximar, con el grado de precisión que se desee, con racionales que admiten representaciones decimales finitas; precisamente

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea α un número real no negativo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un decimal finito $q_n = a_0.a_1 \cdots a_n$ tal que*

$$q_n \leq \alpha < q_n + \frac{1}{10^n}.$$

En consecuencia, α es el supremo del conjunto $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Para construir los racionales q_n tomamos $a_0[\alpha]$, $a_k = [10^k\alpha] - 10[10^{k-1}\alpha]$, $1 \leq k \leq n$. El número real α es cota superior de $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ por construcción, y es la menor de las cotas superiores ya que si existiera otra cota superior $\beta < \alpha$ entonces, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existiría un n tal que $1/(\alpha - \beta) < 10^n$ y para ese n se tiene $q_n > \beta$.

Resulta ahora claro cuál debe ser la definición de *representación decimal infinita* de los números reales. Escribimos

$$\alpha = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$$

para indicar que α es el supremo del conjunto $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Podemos introducir aquí el debate sobre si $0{,}100000\cdots$ o $0{,}09999999$ son o no el mismo número. En realidad, se trata de observar que dos conjuntos diferentes de números reales pueden tener el mismo supremo. Para $\alpha = 0$ se suele tomar la representación $0{,}00\ldots$ y para un $\alpha < 0$, hallamos la representación decimal de $-\alpha$ y cambiamos después el signo.

Podemos así comprobar que la representación decimal de los números reales es bastante satisfactoria: nos da una representación manejable de $\mathbb{R}$, el orden y el modo de incluir $\mathbb{Q}$ son claros, y el axioma del supremo se hace transparente. El gran inconveniente de esta representación es lo complicado que resulta definir las operaciones que efectivamente amplíen la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$.

Nótese finalmente que la representación decimal de un número real α puede interpretarse como una suma infinita

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

aunque formalemente esto no tendrá sentido para nosotros hasta que tratemos con series.

4.4. Las operaciones en $\mathbb{R}$. Discutimos la definición de las operaciones y el orden en $\mathbb{R}$ a partir de la representación decimal de sus elementos. Para saber si dados dos números reales r, s se tiene $r < s$ elegiremos racionales r_n de modo que $r = \sup_n\{r_n\}$ y racionales s_n de modo que $s = \sup_n\{s_n\}$. A continuación $r < s$ si y sólo si $r_n < s_n$ a partir de un cierto n en adelante. Examinamos cuaándo $r \leq s$.

Para definir la suma $r+s$ elegiremos racionales r_n de modo que $r = \sup_n\{r_n\}$ y racionales s_n de modo que $s = \sup_n\{s_n\}$. A continuación $r+s = \sup_n\{r_n+s_n\}$. Análogamente procederemos con el producto.

5. Nociones sobre la topología usual de la recta real

5.1. Valor absoluto. Intervalos. Denominamos valor absoluto de un número real x al número real no negativo $|x| = \sup\{x, -x\}$. Equivalentemente, $|x| = \sqrt{x^2}$ o expresado como función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|x| \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Observemos que la función valor absoluto es una función positiva. Pero la observación fundamental que tenemos que hacer sobre el valor absoluto es la siguiente: dado $\varepsilon > 0$ se tiene

$$|x| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon.$$

Las propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall y, x \in \mathbb{R}, \quad |yx| = |y||x|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$

En consecuencia, se tendrá también : $||x| - |y|| \leq |x - y|$ y $|x^2| = |x|^2$.

5.2. Entorno de un punto. Punto de acumulación. Punto aislado. Llamamos recta real a la interpretación geométrica de los números reales. Con esta visión de $\mathbb{R}$, interpretamos el valor absoluto de un número real $|a|$ como la distancia de a al origen 0. Así, definimos distancia entre dos números reales a y b como el valor

$$d(a, b) = |a - b|,$$

que se corresponde con nuestra idea intuitiva de distancia.

Hablamos de *nociones topológicas* para referirnos a aquellas nociones que nos sirven para precisar la idea de que en número real esté cerca de otro. En el caso de $\mathbb{R}$, y de todo el curso de hecho, bastaría hablar de propiedades *métricas*. La noción topológica fundamental en $\mathbb{R}$ es la de *entorno de un punto*: dado $\varepsilon > 0$, el intervalo

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

se denomina entorno del punto a. Es claro que se trata de los puntos que están a una distancia menor que ε de a. Un sencillo ejercicio que además de ayudarnos a fijar ideas nos será muy útil en las demostraciones de existencia de límites es probar que si $|x - a| < \varepsilon$ y $|y - a| < \varepsilon$ entonces $|x - y| < 2\varepsilon$.

Introducimos finalmente un par más de nociones topológicas que necesitaremos en la definición de límite de una función y en muchos de los conceptos y resultados que tienen que ver con él. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, decimos que a es un *punto de acumulación* de A si para todo entorno “reducido” de a, $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$, se tiene que $U_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$. Vease que no es necesario que a pertenezca a A. Se dice que p es un punto aislado de A si no es de acumulación de A (formúlese la definición en términos matemáticos).

6. Prácticas

1. Este primer capítulo ofrece una buena oportunidad para reforzar el conocimiento de las propiedades de las operaciones con números reales resolviendo problemas sencillos. Eso incluye, por supuesto, saber manejar las propiedades de interacción de las operaciones con la relación de orden. En este sentido la resolución de inecuaciones está especialmente indicada, más aún, si aparace en ellas la función valor absoluto (por ejemplo, $|x - 1| < |x|$). También hacemos ejercicios para calcular las cotas de un conjunto o sus extremos (si existen).
2. **Conjuntos numerables.** Decimos que un conjunto no vacío A es *numerable* si hay una aplicación sobreyectiva $\mathbb{N} \to A$. Es evidente que un subconjunto de un conjunto numerable es numerable. Se pide a los alumnos ejercitarse comprobando que los números enteros y los racionales son conjuntos numerables. ¿Será $\mathbb{R}$ numerable? Precisamente, la representación de los números reales como desarrollos decimales arbitrarios nos vendrá muy bien en esta ocasión (les ayudamos mostrándoles el *argumento diagonal de Cantor*).
3. **Principio de inducción.** Supongamos que tenemos una colección inifinta numerable de afirmaciones P_n; y queremos probar que son todas ciertas. Por ejemplo: para cada número natural n, el número $2n + 1$ es impar. A veces, como en el ejemplo anterior,podremos probar que $2n + 1$ es efectivamente impar cualquiera que sea n. Otras veces no.

   Hay en estos casos un proceso que permite decidir en un número finito de pasos que todas las afirmaciones P_n son ciertas. Tal procedimiento se corresponde precisamente con el tercer axioma de los números naturales y se denomina principio de inducción.

   Principio de inducción. Sea P_n una colección de proposiciones. Si se verifica que
   a) P_1 es cierta.
   b) Cada vez que P_n es cierta, P_{n+1} es también cierta.

   Entonces P_n es cierta para todo n.

Una formulación equivalente del principio anterior se obtiene sustituyendo 1 por un natural cualquiera m.

Con el principio de inducción podemos dar a conocer y probar algunas fórmulas interesantes, como por ejemplo el binomio de Newton, las fórmulas para las sumas de los n-primeros términos de progresiones geométricas y aritméticas, etc…

4. **Los peligros de la inducción.** Mostramos también los peligros del principio de inducción. Sea P_n la afirmación: si α, β son números naturales y $max\{\alpha, \beta\} = n$ entonces $\alpha = \beta$.

   Claramente P_1 es cierta. Y si P_n fuese cierta, entonces P_{n+1} lo sería: pues si $max\{\alpha, \beta\} = n + 1$ entonces $max\{\alpha - 1, \beta - 1\} = n$ por lo que, por inducción, $\alpha - 1 = \beta - 1$, de donde $\alpha = \beta$. Así que todos los números naturales son iguales.
5. Realizar aproximaciones decimales finitas de $\sqrt{2}$ usando algún programa informático adecuado.

CAPíTULO 2

Sucesiones de números reales

Introducción: Situaciones en las que aparecen sucesiones. Noción informal de límite. Definición de sucesión. Algunas formas de definir sucesiones. Ejemplos de diferentes tipos de sucesiones y visualización.

Convergencia de sucesiones: La definición de sucesión convergente y de límite. Ejemplos. Subsucesiones. Definición de sucesión acotada. Ejemplos. Primeros resultados básicos: unicidad del límite, acotación de las sucesiones convergentes y convergencia de las subsucesiones de una sucesión convergente. Ejemplos. Sucesiones de Cauchy.

Operaciones, orden y límites: Linealidad del límite. Estabilidad frente al producto. Acotación e infinitésimos. Regla del sandwich. "Continuidad" de la función valor absoluto. Aplicaciones al cálculo de límites.

Límites infinitos. Monotonía: Definición de límite infinito. Ejemplos. Interacción entre operaciones, órden y límites infinitos. Ejemplos. Definición de sucesión monótona. Teorema de la convergencia monótona y consecuencias. Aplicaciones: definición de número e.

Calculo de límites: Noción de continuidad a través de límites. Algunas funciones que conservan límites. Definición de potencia con exponente real. Aplicaciones al cálculo de límites. Cálculo de límites indeterminados. Indeterminaciones. Criterio de Stolz y consecuencias. Jerarquía de infinitos. Sucesiones equivalentes. Algunos infinitésimos e infinitos equivalentes.

Objetivos específicos

- Entender la noción de sucesión convergente y, por supuesto, de límite.
- Entender el papel de la completitud de $\mathbb{R}$ en los resultados teóricos sobre convergencia de sucesiones.
- Saber aplicar los criterios teóricos de convergencia.
- Conocer algunas sucesiones relevantes (progresiones aritméticas y geométricas, la que define el número e,...)
- Aprender algunas técnicas para calcular límites.

1. Introducción

Las sucesiones son una herramienta fundamental para aproximar soluciones en gran cantidad de problemas de diversa índole. Para motivar al alumno comenzamos mostrando algunas situaciones donde aparecen sucesiones que "apuntan" hacia un valor como solución de una determinada ecuación. Por ejemplo es posible calcular aproximadamente las áreas de figuras planas utilizando otras figuras cuya área sí sepamos calcular; lo que se denomina método de exhaución de Arquímedes. Por ejemplo, proponemos encontrar un método para aproximar el área del círculo, sabiendo que conocemos las áreas de los polígonos regulares; aunque en principio no conozcamos el valor exacto de dicha área.

También nos planteamos cómo aproximar los ceros de funciones, visualizando por ejemplo (aunque sea de modo informal) el método de Newton. Un ejemplo que tenemos muy reciente es el de la aproximación de números reales; caemos en la cuenta (aunque aún no podamos probarlo formalemente) de que el axioma del supremo nos dice que todo número real es el "límite" de una sucesión de números racionales y de que las aproximaciones con decimales finitos que hacíamos en el capítulo anterior constituyen un ejemplo de tales sucesiones. Las sucesiones y la noción de límite también aparecen en los fundamentos mismos del cálculo de probabilidades: la definición frecuentista de probabilidad para sucesos "equiprobables" se da a través de un límite: el de las frecuencias relativas del suceso. Aunque en la práctica no se calculan las probabilidades usando esta definición, el caso es que en muchos problemas la probabilidad se obtendrá como el límite de una sucesión. Por ejemplo, si realizamos lanzamientos de una moneda trucada y queremos calcular la probabilidad de que la primera vez que salga cara hayamos hecho un número par de lanzamientos, tendremos que calcular el límite de la sucesión $((1-p)(p+p^3+\cdots+p^{2n-1}))$. Otro tipo de problemas de la estadística matemática que requieren del conocimiento de la noción de límite serán los problemas de convergencia de variables aleatorias (convergencia en probabilidad, casi segura y en ley) y los relacionados con los llamados "teoremas del límite".

Una vez visualizada la noción de sucesión y de límite (como la "tendencia" de la sucesión) introducimos formalmente la definición de sucesión de númereos reales; una función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Algunos ejemplos triviales de sucesiones pueden ser útiles para prevenir o corregir ciertas ideas preconcebidas que son erróneas. Por ejemplo, una sucesión constante sirve para distinguir entre la propia sucesión y el conjunto de valores que toma (o *rango* de la sucesión). Visualizamos diferentes tipos de sucesiones representándolas en la recta real o en el plano de modo que pueda observarse que hay sucesiones que dan saltos, otras que tienen uno o varios puntos de acumulación, otras que no son acotadas... Observamos que dar un conjunto numerable también es dar (el rango de) una sucesión, así, sabemos construir una sucesión cuyos términos sean todos los números racionales.

Observando algunos de los ejemplos dados nos fijamos en que hay sucesiones que parecen responder a una regla, es decir, se pueden describir dando una fórmula para el término general $a_n = f(n)$. De este modo encontramos un primer método para construir sucesiones, tan obvio como dar valores naturales a funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conocidas. Se propone a los alumnos hallar el término general en algunos ejemplos sencillos de sucesiones. Una forma obvia de conseguir sucesiones es extraer "subsucesiones" de una dada. Otro tipo de sucesiones que responden a una regla son las que llamamos *recurrentes*; $x_{n+1} = f(x_n)$. Un ejemplo clásico es la sucesión de Fibonacci:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Más ejemplos de sucesiones recurrentes son las progresiones aritméticas y geométricas,

2. Convergencia de sucesiones

2.1. La definición de límite. Es el momento de introducir la definición de *límite* de una sucesión. Comenzamos con un ejemplo sencillo de sucesión convergente, pongamos $(\frac{1}{n})$, y pedimos al alumno que proponga un valor $l \in \mathbb{R}$ *candidato* a límite. Tantas veces como el alumno nos dé un entorno de l, nosotros encontraremos un índice N tal que de él en adelante todos los términos de la sucesión caen dentro de dicho entorno. Con esto observamos que no importa lo pequeño que se elija el entorno de l, éste contendrá a todos los términos de la sucesión, salvo un número finito. Es importante que el alumno reconozca que el intervalo se puede hacer tan pequeño como se quiera a base de sumar y restar a l cada vez cantidades más pequeñas, que se denotan usualmente ε; así los entornos se describen: $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y-x| < \varepsilon\}$.

Introducimos aquí formalmente la definición de límite de una sucesión. Diremos que l es el límite de la sucesión (a_n) si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |a_n - l| < \varepsilon.$$

Lo que escribiremos como $l = \lim a_n$ o, más informalmente, $a_n \to l$ diciendo que (a_n) converge a l.

De nuevo, algunos ejemplos sencillos pueden ser útiles para corregir intuiciones erróneas; no en vano Euler dice en algún lugar de sus obras que el límite de una sucesión es aquel valor al que los términos de la sucesión se acercan “cada vez más”. Es igualmente importante hacer notar que para probar que una sucesión (x_n) no converge a un valor l basta encontrar un entorno de l (un ε) de modo que hay infinitos términos de la sucesión fuera del entorno $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. O, lo que es igual aunque se enuncie como un trabalenguas, que para que una sucesión converja a un punto basta que toda subsucesión contenga una subsucesión que converge al punto dado. Si una sucesión no converge a ningún valor diremos que la sucesión no es convergente.

Verificamos la definición de límite en algunas sucesiones convergentes sencillas que tienen límite 0: $(1/n)$, $(1/(n^2+1))$, (x^n) para $0 < x < 1$,...) y también probamos que otras como $((-1)^n)$ no convergen (a ningún sitio). Advertimos que la definición de límite se usa para probar que un valor propuesto es de hecho el límite de la sucesión. Sin embargo, no nos proporciona un método para determinar en principio qué valor es el “candidato” a límite. Veremos más adelante algunos resultados que pueden usarse para este fin. Con todo, a veces es necesario calcular suficientes términos de una sucesión para conjeturar un valor límite, eso sí, subrayando que en ningún caso dicho cálculo constituye una demostración.

2.2. Primeros resultados básicos. Definimos subsucesión y sucesión acotada. Probamos los primeros resultados fundamentales:

- *El límite de una sucesión es único (si existe)*
- *Toda sucesión convergente está acotada*
- *Una sucesión converge a un punto si y sólo si toda subsucesión suya converge al mismo punto.* Equivalentemente: *Una sucesión converge si y sólo si toda subsucesión suya converge.*

Demostrar los resultados anteriores tiene su interés. Se adquieren además herramientas para hacer estimaciones con la función valor absoluto; por ejemplo, comprobamos la utilidad de sumar y restar un mismo valor y utilizar después la desigualdad triangular. Los dos últimos resultados proporcionan criterios útiles para decidir que una sucesión no es convergente.

Definimos a continuación sucesión de Cauchy. Formalmente, (a_n) es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N, |a_p - a_q| \leq \varepsilon.$$

La discusión subsiguiente contemplará la relación entre el carácter de Cauchy, acotación y existencia de límite (en particular, que una sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente). También, que una sucesión de Cauchy es convergente si y sólo si admite una subsucesión convergente.

3. Operaciones, orden y límites

Damos las primeras herramientas para el cálculo de límites viendo las propiedades de los límites con respecto a las operaciones con sucesiones y con respecto al orden: Definimos el orden $(a_n) \leq (b_n)$ si para algún $k \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq k$; es decir, si $a_n \leq b_n$ excepto tal vez para una cantidad finita de términos; análogamente se define $(a_n) < (b_n)$. Cuando se compara con una sucesión constante simplemente escribimos –por ejemplo– $(a_n) \leq M$; y su significado es obviamente que “casi todos” los términos de la sucesión –es decir, todos salvo una cantidad finita– son menores o iguales que M.

Operaciones y límites. Supongamos que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. Entonces:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim \lambda a_n = \lambda a$.
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
4. Si $b_n \neq 0$, $\forall n$, y $b \neq 0$, entonces $\lim a_n/b_n = a/b$.

Orden y límites. Continuamos suponiendo que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$.

5. Si $(a_n) \leq (b_n)$ entonces $a \leq b$.
6. Si $a < b$ entonces $(a_n) < (b_n)$.
7. [Regla del Sandwich] Si $(a_n) \leq (c_n) \leq (b_n)$ y $a = b$ entonces $\lim c_n = a$.
8. Si (a_n) es acotada (no hace falta aquí suponer que es convergente) y $b = 0$ entonces $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.
9. Si $\lim a_n = a$ entonces $\lim |a_n| = |a|$.

En cuanto a las demostraciones será suficiente probar la linealidad del límite a fin de que se conozca el modus operandi, que será, en líneas generales, común. Las demostraciones de las propiedades 5, 6, 7, 8 y 9 merecen hacerse ya que son sencillas y muy visuales.

De 6 se siguen observaciones sencillas pero importantes, como que si una sucesión tiene como límite un valor distinto de 0 entonces todos los términos de las sucesión, salvo quizás una cantidad finita, tienen el mismo signo que el límite; o que si una sucesión convergente cumple $m \leq (a_n) \leq M$, entonces su límite está en el intervalo $[m, M]$. Un buen ejercicio es reflexionar sobre la veracidad de las anteriores propiedades pero con desiguadades estrictas.

Así pues, aunque no lo parezca con las propiedades que acabamos de ver hemos ampliado notablemente nuestros recursos para calcular límites. Por poner un ejemplo, deberíamos saber ya calcular muchos límites de sucesiones con término general $a_n = P(n)/Q(n)$, con P, Q polinomios reales. O bien, un sencillo ejemplo de aplicación de la regla del sandwich es el cálculo de $\lim \frac{\text{sen(n)}}{n}$. Recomendamos además hacer un par de ejercicios que pueden resultar útiles para el estudio de otros límites:

- Si $\lim x_n = x$ y $x > 0$ entonces $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.
- Si $(\frac{x_{n+1}}{x_n}) < (1)$ entonces $\lim x_n = 0$.

Verificamos también otros límites que serán de utilidad: $\lim \sqrt[n]{x} = 1$, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim x^n = 0$ para $0 < |x| < 1$.

4. Límites infinitos. Límites de las sucesiones monótonas

4.1. Límites infinitos. Introducimos la noción de límite infinito (on lo que la expresión "tiende a infinito" refleja el comportamiento de la sucesión). Escribiremos $a_n \to +\infty$ y diremos que la sucesión tiende a infinito, o tiene límite "más infinito" o diverge a $+\infty$, si para toda constante positiva M se tiene $M \leq (a_n)$. Escribiremos $\lim a_n = +\infty$ o bien $a_n \to +\infty$. Ilustramos la definición con algunos ejemplos ((x^n) para $x > 1$; (n^k) para $k \in \mathbb{N}; \dots$) y observamos que el hecho de que que una función no esté acotada superiormente no es suficiente para asegurar que tiende a infinito, por ejemplo, $((-1)^n n)$ no está acotada y no tiende a infinito. Vemos también que si una sucesión tiende a infinito entonces toda subsucesión suya tiende también a infinito. Mostramos a continuación la interacción entre operaciones, orden y límites infinitos:

1. Si $\lim x_n = +\infty$ y $(x_n) \leq (y_n)$ entonces $\lim y_n = +\infty$.
2. Si $\lim x_n = +\infty$ y $m \leq (y_n)$ entonces $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.
3. Si $\lim(x_n) = +\infty$ y $0 < m \leq (y_n)$ entonces $\lim x_n y_n = +\infty$.
4. Si $\lim x_n = +\infty$ y $0 < (x_n)$ entonces $\lim(1/x_n)0$.
5. Si $\lim x_n = 0$ y $0 \leq (x_n)$ entonces $\lim(1/x_n) + \infty$.

La definición y los resultados correspondientes para los límites $-\infty$ se obtienen inmediatamente por analogía.

Ponemos algunos ejemplos en los que se muestre que en general para las demás variantes de operaciones con límites infinitos el resultado queda sin determinar.

4.2. Límites de las sucesiones monótonas. Introducimos la noción de sucesión monótona y, acto seguido, nos proponemos probar que dichas sucesiones tienen un comportamiento bastante simple con respecto a la convergencia: o son convergentes o tienden a infinito. Este resultado se obtiene como consecuencia del axioma del supremo de los números reales:

- (Teorema de la convergencia monótona) *Una sucesión monótona converge si y sólo si está acotada.*

Además, el límite de una sucesión monótona y acotada será el supremo (resp. el ínfimo) del conjunto de términos de la sucesión, según sea ésta creciente o decreciente, respectivamente.

El teorema de convergencia monotóna es uno de los pocos criterios de los que se dispone para asegurar la convergencia de una sucesión sin conocer previamente un candidato a límite. Un buen ejemplo al que aplicar dicho criterio es la sucesión de término general

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

cuyo límite (que existe) denominamos número e. De dicho valor sólo podremos concluir que está en el intervalo $(2, 3)$. Comprobamos además, ayudados por la función parte entera, que si x_n tiende a $+\infty$ o $-\infty$ entoncies

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

El teorema de convergencia monótona da también un método para obtener el límite en el caso en que podamos evaluar el supremo o ínfimo (según corresponda al caso) de una sucesión. Véase, por ejemplo, la Práctica 3. Aún si el supremo (o ínfimo) no es fácil de calcular hay otras herramientas para obtener límites en casos como los anteriores; ver Práctica 4.

Veamos un par más de resultados fundamentales. El primero de ellos es la siguiente observación, que merece la pena que el alumno intente probar por sí mismo: *Toda sucesión posee una subsucesión monótona.* Como consecuencia inmediata, si (x_n) es una sucesión convergente a x, hay una subsucesión monónota de (x_n) que converge a x.

El segundo resultado fundamental, consecuencia inmediata de lo anterior y el teorema de la convergencia monótona es el:

- (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente*

Sugerimos hacer la demostración como ejercicio.

5. Cálculo de límites

5.1. Algunas funciones que conservan límites. Si prestamos un poco de atención a los ejercicios que hemos hecho hasta ahora descubriremos que hay ciertas funciones que parecen tener la (buena) propiedad de preservar límites; si $x_n \to x$ entonces $f(x_n) \to f(x)$. Las funciones con esta propiedad se denominan funciones *continuas* y las estudiaremos con detalle más delante. En este momento, sólo nos ocuparemos de verificar esta propiedad en unas pocas funciones que serán especialmente útiles (precisamente por conservar límites) en el cálculo de gran cantidad de límites.

Hasta el momento, sabemos que conservan límites la función valor absoluto, los polinomios y la función raíz cuadrada. Sería de gran utilidad saber que las funciones logaritmo, exponencial y potencial - exponencial conservan límites. Pero para comprobar esto nos encontramos con un serio problema nada más empezar: ni siquiera tenemos una definición adecuada de dichas funciones. Encontramos nuestro primer problema con la función exponencial, $f(x) = a^x$, para $a > 0$; y es que necesitamos dotar de sentido a la expresión a^α para $\alpha \in \mathbb{R}$. Sabemos qué significa dicha expresión si $\alpha \in \mathbb{Q}$ pero, si α es irracional...

Para encontrar una salida, recordamos que α es el límite de una (en realidad, de muchas) sucesión monótona creciente de números racionales, pongamos (q_n). Podemos comprobar que (a^{q_n}) es también monótona creciente, y acotada. Por tanto, por el teorema de la convergencia monótona sabemos que (a^{q_n}) es convergente. Su límite se denotará a^α. Para que lo anterior nos dé la definición de función exponencial de variable real faltaría probar, lo que no procede en este momento, que la definición es buena; esto es, que si (p_n) es otra sucesión creciente de racionales que converge a α entonces $\lim a^{q_n} = \lim a^{p_n}$. Admitido esto, tendremos también definidas las funciones logaritmo y potencial - exponencial. Sabiendo ahora las propiedades básicas de la exponencial y el logaritmo, estamos en condiciones de probar que si $x_n \to x$ entonces

1. Si $x > 0$ y $a > 1$ se tiene $\log_a x_n \to \log_a x$.
2. Si $a > 0$ se tiene $a^{x_n} \to a^x$.
3. Si $x > 0$ se tiene ${x_n}^{x_n} \to x^x$.

Comprobaremos inmediatamente la efectividad de estas propiedades calculando algunos límites como $\lim \sqrt[n]{a}$ o $\lim \frac{\log n}{n}$.

5.2. Cálculo de límites indeterminados. .

• *Indeterminaciones.* En lo que sigue con las expresiones ∞ y 0 indicamos que la sucesión tiende a infinito y 0, respectivamente. Si es preciso distinguir entre $+\infty$ y $-\infty$, lo haremos.

Si tenemos dos sucesiones y al querer calcular el límite de su suma, producto, cociente, etc nos encontramos con las situaciones: $\infty - \infty$, $0/0$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, ∞^0, 0^0 y 1^∞, nada se puede asegurar a priori sobre el límite que buscamos. Así, decimos que tenemos un límite indeterminado o una indeterminación. Por ejemplo, $\lim \frac{n+1}{n}$ es una indeterminación del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Comenzamos mostrando que los cuatro primeros tipos de indeterminación son el mismo; o mejor, pueden reducirse al mismo pongamos $0 \cdot \infty$. Es decir, las tres restantes pueden reducirse a ésta operando con los términos generales. Ponemos ejemplos suficientes y damos indicaciones para resolver los casos típicos que dan lugar a estas indeterminaciones (cocientes de polinomios en n, expresiones con irracionales cuadráticos o de orden superior, expresiones con funciones trigonométricas,...). En particular, incorporamos la regla de Stolz y algunas de sus consecuencias:

◦ [Regla de Stolz] Supongamos que $(a_n), (b_n)$ se encuentran en alguna de las condiciones:
- (b_n) es estrictamente creciente
- $b_n \to \pm\infty$
- $\lim a_n = 0 = \lim b_n$

Entonces

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \text{ (finito o infinito)} \Longrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = l.$$

◦ Si $x_n \to l$ (finito o infinito), entonces

$$\lim \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = l$$

y si $x_n > 0$ entonces

$$\lim \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} = l.$$

◦ Si $(x_n) \geq 0$ y $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ (finito o infinito) entonces $\lim \sqrt[n]{x_n} = l$.

A continuación, damos también las técnicas básicas para resolver las indeterminaciones en forma de potencia; las reduciremos al caso $0 \cdot \infty$ teniendo en cuenta que $\lim {a_n}^{b_n} e^{\lim b_n \log a_n}$. En el caso de la indeterminación 1^∞ o indeterminación del tipo "número e" se procederá escribiendo $\lim {a_n}^{b_n} = e^{\lim b_n (a_n - 1)}$.

• *Jerarquía de infinitos.* La rapidez con la que converge una sucesión es fundamental a la hora de aproximar soluciones. Análogamente, es de gran utilidad a la hora de calcular límites saber si una sucesión converge a infinito "más rápidamente" que otra. Así pues, escribimos $(x_n) \ll (y_n)$ para indicar que $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$. Proponemos comprobar que para $0 < \alpha < \beta$ y $1 < k < r$ se tiene:

$$(\log n) \ll (n^\alpha) \ll (n^\beta) \ll (k^n) \ll (r^n) \ll (n!) \ll (n^n).$$

Y también que si $\lim x_n = +\infty$ se tiene:

$$(\log x_n) \ll (x_n^\alpha) \ll (x_n^\beta) \ll (k^{x_n}) \ll (r^{x_n}) \ll (x_n^{x_n}).$$

• *Equivalencia de infinitésimos e infinitos.* Introducimos la noción de sucesiones equivalentes con el fin de saber qué sucesiones podemos cambiar por otra en un cálculo de límites.

Decimos que dos sucesiones (x_n) e (y_n) son equivalentes, lo que escribimos $(x_n) \sim (y_n)$, si

$$\text{lím} \frac{x_n}{y_n} = 1;$$

o, equivalentemente, si hay una sucesión $c_n \to 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, $y_n = c_n x_n$. Dos sucesiones equivalentes tienen el mismo carácter (mismo límite si convergen o ambas tienden a $\pm\infty$).

Llamamos infinitésimo a una sucesión que converge a 0. Y decimos que una sucesión es un infinito si tiene límite infinito. Las equivalencias entre infinitésimos y entre infinitos tienen un papel importante a la hora de resolver límites puesto que en muchas ocasiones puede sustituirse uno por otro equivalente. Únicamente tendremos que conocer las reglas para sustituir una sucesión por otra equivalente de modo que el límite que queremos calcular no se altere:

[Principio de Sustitución] Supongamos que existen los límites $\text{lím}\, x_n y_n$ y $\text{lím} \frac{x_n}{y_n}$, y que $(y_n) \sim (y'_n)$, entonces

$$\text{lím}\, x_n y'_n = \text{lím}\, x_n y_n \qquad y \qquad \text{lím} \frac{x_n}{y'_n} = \text{lím} \frac{x_n}{y_n}.$$

Finalmente, probamos algunas equivalencias útiles entre infinitésimos. Por ejemplo, $(\text{sen} \frac{1}{n}) \sim (1/n)$ o $\log(1 + x_n) \sim x_n$.

6. Prácticas

Haremos abundantes ejercicios de cálculo de límites aplicando los criterios y métodos dados en teoría, tratando también de reforzar los contenidos del capítulo cuya aplicación al cálculo de límites es quizás más delicada. También visualizaremos la convergencia de algunas sucesiones con ayuda del ordenador. Algunas de estos ejercicios podrían ser:

1. Véase cómo aplicando la regla del sandwich, y con ayuda de la fórmula para la suma de los n-primeros términos de una progresión aritmética, se prueban fácilmente los siguientes límites:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1; \qquad \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \to 1$$

2. Como práctica teórica, valga la contradicción, proponemos la siguiente:
   a) Definimos intuitivamente el "límite superior" de una sucesión acotada.
   b) Proponemos obtener una definición formal válida: ¿podría servir el supremo del conjunto de puntos de acumulación de los valores de la sucesión?
   c) Observación del siguiente fenómeno: así como no todas las sucesiones acotadas tienen límite, todas tienen límite superior.
   d) Obtener las propiedades del límite superior (¿es lineal? ¿se cumple que $\text{lím sup}(x_n y_n) = \text{lím sup}\, x_n \,\text{lím sup}\, y_n$? etc.
   e) Repetir el ejercicio con la noción de "límite inferior".
   f) Ya que $\text{lím ínf}\, x_n \leq \text{lím}\, x_n \leq \text{lím sup}\, x_n$, ¿se cumple que (x_n) tiene límite si y sólo si el límite superior e inferior coinciden?
3. Con ayuda del Principio de Inducción y el teorema de la convergencia monótona, calcúlese el límite de la sucesión definida por recurrencia: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$.
4. Teniendo ahora en cuenta además que el límite de las colas de la sucesión es el mismo que el de la propia sucesión, hállese el límite de: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$, $n \geq 1$.
5. Prácticas de ordenador:

a) Aproximación de raíces cuadradas: la sucesión definda por recurrencia

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x/x_n)$$

converge a $\sqrt{x}$.

b) Aproximaciones racionales a $\sqrt{2}$:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}.$$

Comparar la rapidez de la convergencia con la de la sucesión proporcionada por el ejercicio anterior.

c) Comprobar que la sucesión

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

converge más rápidamente al número e que $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

d) Método de Newton para hallar ceros de una función.

CAPíTULO 3

Series de números reales

Introducción: Algunos ejemplos donde aparecen "sumas infinitas". Definición de sumas parciales y de serie. Convergencia. Algunas series notables: series geométricas y series armónicas generalizadas. Propiedades de las series. Algunas observaciones sobre reordenación y agrupamiento. El criterio de sumabilidad de Cauchy. El término general tiende a cero. Algunos ejercicios.

Series de términos positivos: Criterios de comparación directa y en límite. Criterios derivados por comparación directa con las series geométricas (criterios del cociente y de la raíz). Criterios derivados por comparación en el límite con las series armónicas generalizadas (criterios de Raabe, logarítmico, de Pringsheim). Criterio de condensación de Cauchy. Ejemplos.

Series arbitrarias: convergencia absoluta y convergencia condiciona: Algunas observaciones generales sobre series de términos positivos y negativos. Convergencia absoluta y condicional. Series alternadas. Criterio de Leibniz. Ejemplos. Convergencia condicional y reordenación (Teorema de Riemann y consecuencias). Criterios generales de convergencia. Ejemplos.

Sobre el cálculo de la suma: Sumas de algunas series notables. Cálculo aproximado. Métodos de aproximación: Acotación directa del resto. Método de la mayorante. Métodos de acotación del resto derivados de los criterios de convergencia.

Introducción a las series de potencias: Definición de convergencia puntual de funciones. Definición de serie de potencias. Definición de radio, intervalo y dominio de convergencia. Determinación del radio de convergencia. Algunas propiedades de las series de potencias. Algunos desarrollos de funciones en series de potencias. Extensión de algunos desarrollos a series complejas de potencias: Definición de las funciones seno, coseno y exponencial complejas. Fórmula de Euler. Algunas aplicaciones.

Objetivos específicos

- Entender la noción de serie, o suma infinita, y la de convergencia de una serie.
- Entender la naturaleza diferente de una serie respecto de una suma finita.
- Conocer algunas series relevantes en Análisis y algunas fórmulas de sumación.
- Aprender algunas técnicas para detectar la convergencia.
- Aprender a utilizar el resto de una serie convergente para aproximar el valor de la suma.
- Conocer la importancia que tienen las series en la teoría de funciones. En particular, conocer desarrollos en series de potencias de algunas funciones elementales.

1. Introducción

Comenzamos motivando el capítulo con algunos ejemplos en los que se tiene la necesidad de sumar los términos de una sucesión infinita de números reales – la Práctica número 1 está especialmente inicada–. Un ejemplo físico: si una pelota se deja caer desde una determinada altura h y cada vez que rebota alcanza una altura cs, donde c es una constante y s es la altura alcanzada en el rebote anterior, ¿qué espacio recorre la pelota? Un ejemplo matemático que tenemos reciente es el de la representación decimal de los números reales; si nos preguntan si podemos expresar un decimal infinito $\alpha = a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ como suma de racionales es natural dar una respuesta afirmativa escribiendo $\alpha = a_0+a_1\cdot 1/10+a_2\cdot 1/10^2+\cdots+a_n\cdot 1/10^n+\cdots$ pero, ¿qué significa esa expresión? Reflexionamos sobre ello. En Estadística será muy frecuente encontrarse que para calcular la probabilidad de un suceso hay que hacer una suma infinita, recuérdese el ejemplo que dimos en el capítulo anterior; si efectuamos lanzamientos de una moneda trucada, ¿cuál es la probabilidad de que la primera vez que salga cara ocurra tras un número impar de lanzamientos? El resultado vendrá dado en términos de una suma infinita (una especial que llamamos serie geométrica) ya que el suceso cuya probabilidad queremos calcular se expresa como una unión infinita de sucesos disjuntos dos a dos. Pero el cálculo de probabilidades no es la única parte de la Estadística donde tendremos que hacer sumas infinitas, por ejemplo, también surgirán cuando queramos estudiar la convergencia casi-segura de variables aleatorias.

1.1. Definición de serie de números reales. Dada una sucesión de números reales (x_n), pretendemos dar sentido a la noción intuitiva de *suma infinita* $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+\dots$. Llamamos suma parcial k-ésima de la sucesión (x_n) a $s_k = x_1 + \cdots + x_k$. La sucesión (s_n) de sumas parciales se denomina *serie* asociada a la sucesión (x_n), escribimos $\sum x_i$. Si (s_n) es convergente decimos que la serie es *convergente* o *sumable.* El límite de (s_n), si existe, se denomina *suma* de la serie (muchas veces lo denotaremos con el mismo símbolo $\sum x_i$). Si la sucesión de sumas parciales tiende a infinito diremos que la serie tiene suma infinita o diverge. Por último, si la sucesión de sumas parciales no tiene límite diremos simplemente que la serie no es sumable. Los números x_n se denominan términos de la serie. Es esencial en este punto que se distinga entre la sucesión de términos, (x_n), y la serie, sucesión (s_n) de sumas parciales. Por último, llamamos resto N-ésimo de una serie convergente a $\sum x_n - s_N$.

Desde este momento debe ser claro que estudiar la convergencia de una serie es lo mismo que estudiar la convergencia de una sucesión y, por tanto, todas las herramientas adquiridas en el capítulo anterior son aplicables al estudio de la sumabilidad de una serie. Sumar series es pues un proceso lineal.

1.2. Algunas series notables. Veamos la convergencia de unas pocas series relevantes:

• *Las series geométricas.* Nuestro primer ejemplo de serie será una serie notable de la que ya hemos hablado con anterioridad; la serie geométrica. Podemos introducirla invitando al alumno a pensar en la siguiente situación: si tenemos una tarta de la que nos tomamos una mitad, y después la mitad de la otra mitad, y después la mitad de la mitad,... Asumiendo que el proceso físico de división de la tarta es posible indefinidamente, es obvio (a nivel intuitivo) que la cantidad que nos comemos es finita, aun no dejando nunca de comer. Dicha cantidad converge a la unidad: la tarta entera. Lo que estamos afirmando que la serie $\sum 1/2^n$ suma 1. Demostrarlo es otra cosa, aunque no difícil.

Una serie geométrica es una serie de la forma $\sum r^n x_0$; es decir, si x_n es su término general, hay un número $r > 0$ tal que $x_{n+1} = rx_n$. La serie es sumable si y sólo si $|r| < 1$. La suma, si existe, es $x_0/(1-r)$. La importancia de la serie geométrica radica, entre otras cosas, en que, por comparación, nos dará la convergencia de otras muchas series interesantes.

• *La serie armónica.* Denominamos serie armónica a la serie

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

La serie no es sumable, y de hecho $\sum 1/n$ diverge a $+\infty$, porque

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq \frac{1}{2}$$

• *Las series armónicas generalizadas.* Se denominan series armónicas generalizadas a las series de la forma

$$\sum \frac{1}{n^p}.$$

La serie armónica es el caso particular $p = 1$, que ya hemos visto que no es sumable. Para $p < 1$, puesto que $1/n < 1/n^p$, la serie $\sum 1/n^p$ diverge a $+\infty$. Si $p > 1$, comprobamos que la sucesión de sumas parciales (s_n) tiene una subsucesión, (s_{2^n-1}), que para todo n verifica

$$0 < s_{2^n-1} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n(p-1)}},$$

luego (s_{2^n-1}) converge, y así también lo hace (s_n), además, al mismo límite. Reflexionamos un poco sobre los detalles que hacen que funcione el último razonamiento y nos preguntamos si será cierto en general que si una subsucesión de la sucesión de sumas parciales converge entonces la serie converge, y a la misma suma.

- *Las series telescópicas.* Llamamos series telescópicas a las series de la forma

$$\sum (x_n - x_{n+1}),$$

que son convergentes si y sólo si la sucesión (x_n) es convergente. En ese caso, el valor de la suma es $\sum (x_n - x_{n+1}) = x_1 - \lim x_n$. Las series $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ y $\sum \log(1 + 1/n)$, son ejemplos no triviales de series telescópicas.

1.3. Observaciones sobre agrupación y reordenamiento. Es un buen momento para hacer notar que las propiedades conmutativa y asociativa de las sumas finitas no se verifican, en general, cuando hay sumas infinitas involucradas. Es decir, es posible que las series

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + ...$$

y

$$(1 - 1) + (1 - 1) + ...$$

se porten de forma diferente: de hecho la primera diverge y la segunda converge. Igualmente, si se reordenan los términos, por ejemplo

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + ...$$

el resultado podrá cambiar de nuevo.

También sorprende observar que suprimir infinitos términos de una serie que diverge a $+\infty$ puede dar lugar a una serie convergente. Compruébese con la serie armónica (ver Práctica 8).

1.4. Criterio general de sumabilidad de Cauchy. El primer criterio que damos para decidir la convergencia de una serie no es más que la correspondiente reformulación del criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones; *una serie es sumable si y sólo si cualquier suma finita de términos consecutivos suficientemente altos es tan pequeña como se quiera.*

Obtenemos del criterio de Cauchy una condición necesaria para la convergencia de una serie: *El término general de una serie sumable tiende a* 0. Ya conocemos algunos ejemplos, $\sum 1/n$ o $\sum r^n$, $|r| \geq 1$, que muestran que esta condición sobre el término general no es suficiente.

2. Series de términos positivos

De la observación de que la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos es siempre creciente y del teorema de la convergencia monótona se sigue que *una serie de términos positivos es sumable si y sólo si la sucesión de sumas parciales está acotada.* Así que las series de términos positivos o bien son sumables o divergen a $+\infty$. Como consecuencia, las series de términos positivos tendrán la propiedad asociativa, es decir (con abuso del lenguaje), tomar paréntesis no altera el carácter de la serie. Los criterios que usaremos para decidir si una serie de términos positivos es sumable son esencialmente criterios de comparación con respecto a las series armónicas generalizadas y las series geométricas.

Comprobaremos después que, gracias a estos criterios, estudiar la convergencia de una serie de términos positivos se reducirá a conocer el carácter de unas pocas series, esencialmente, el de las series geométricas y el de las series armónicas generalizadas. En toda esta sección las series serán de términos positivos, salvo que se diga lo contrario. Escribiremos $\sum x_n < \infty$ para indicar que la serie es convergente.

• *Criterio de comparación directa.*

$$0 \leq x_n \leq y_n; \qquad \sum y_n < \infty \Rightarrow \sum x_n < \infty.$$

Observemos que este criterio ya lo usamos (sin decirlo explícitamente) en el estudio de la convergencia de las series armónicas generalizadas ($p < 1$).

• *Criterio de comparación por paso al límite.* Sean $\sum x_n$ y $\sum y_n$ dos series tales que $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$:

⋄ Si $0 < a < +\infty$, entonces $\sum x_n < \infty \iff \sum y_n < \infty$.
⋄ Si $a = 0$, entonces $\sum y_n < \infty \implies \sum x_n < \infty$.
⋄ Si $a = +\infty$, entonces $\sum x_n < \infty \implies \sum y_n < \infty$.

Como consecuencia de aplicar adecuadamente el criterio de comparación directa tomando como referencia las series geométricas obtenemos los siguientes criterios:

◦ *El criterio del cociente o de D'Alembert.* Si $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, entonces

⋄ Si $a < 1$, $\sum x_n < \infty$.
⋄ Si $a > 1$, $\sum x_n = \infty$.
⋄ Si $a = 1$, puede ocurrir cualquier cosa.

◦ *El criterio de la raíz o de Cauchy.* Si $\lim \sqrt[n]{x_n} = a$, entonces

⋄ Si $a < 1$, $\sum x_n < \infty$.
⋄ Si $a > 1$, $\sum x_n = \infty$.
⋄ Si $a = 1$, puede ocurrir cualquier cosa.

Discutiremos brevemente la aplicabilidad de los anteriores criterios: que el criterio de la raíz decide mejor que el del cociente (es decir, cuando el criterio del cociente es aplicable lo es también el de la raíz, sin embargo el recíproco no es cierto; como muestra la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots.$$

Usando ahora el criterio de comparación en el límite tomando como referencia las series armónicas generalizadas obtenemos tres nuevos criterios:

◦ *El criterio de Raabe.* Si $\lim n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = a \in \mathbb{R}$, entonces

⋄ Si $a > 1$, $\sum x_n < \infty$.
⋄ Si $a < 1$, $\sum x_n = \infty$.
⋄ Si $a = 1$, puede ocurrir cualquier cosa.

◦ *Criterio logarítmico.* Si $\lim \frac{\log(1/x_n)}{\log n} = a \in \mathbb{R}$[1], entonces

⋄ Si $a > 1$, $\sum x_n < \infty$.
⋄ Si $a < 1$, $\sum x_n = \infty$.
⋄ Si $a = 1$, puede ocurrir cualquier cosa.

◦ *El criterio de Pringsheim o del producto.* Si $0 < \lim n^p x_n = a < +\infty$, entonces

$$\sum x_n \text{ converge } \iff p > 1.$$

Con el criterio de Raabe podemos resolver el carácter de las serie hipergeométrica, $\sum an + b/an + c$, $a \neq 0$, y con el de Prigsheim el de las series cuyo término general es un cociente de polinomios en n. Finalmente, obtenemos

◦ *El criterio de condensación de Cauchy.* Si $x_n \to 0$, entonces

$$\sum x_n < \infty \iff \sum 2^n x_{2^n} < \infty.$$

Este criterio resuelve, en particular, el carácter de las llamadas series de Bertrand;

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log n^\beta}, \qquad \alpha,\, \beta > 0.$$

[1]En todo este capítulo con log denotamos el logaritmo neperiano.

3. Convergencia absoluta y convergencia condicional

Comenzamos con algunas observaciones generales sobre la importancia de los signos de los términos de una serie. Por ejemplo, que alternar signos en la serie armónica, obteniendo la denominada serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

cambia el carácter de dicha serie. Se puede comprobar que esta serie es sumable

Introducimos pues la noción de convergencia absoluta y comprobamos que converger de forma absoluta implica la convergencia ordinaria, con lo que todos los criterios estudiados anteriormente pueden usarse para estudiar la convergencia de una serie cualquiera. Sin embargo, la condición de converger absolutamente no es suficiente, como bien muestra el ejemplo de la serie armónica alternada. Llamamos serie condicionalmente convergente a una serie que es sumable pero no absolutamente sumable.

3.1. Series alternadas. Las series con términos positivos y negativos donde los signos se alternan y de modo que la sucesión de los valores absolutos de la serie es decreciente se denominan *series alternadas.* A continuación probamos un criterio para decidir la convergencia de series alternadas que, además, nos permite aproximar la suma de la serie.

- (Criterio de Leibniz) *Si una sucesión* (x_n) *de términos positivos converge a cero monótonamente entonces la serie alternada* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n$ *es sumable, su suma es positiva y es menor que* x_1.

Ilustramos geométricamente el criterio de Leibniz y observamos que nos permite calcular fácilmente el error que se comete al sustituir el valor de la suma de la serie por una suma parcial.

3.2. Convergencia condicional y reordenación. Ya observamos al principio del capítulo que reordenar los términos de una serie puede dar lugar a una serie que, en lo que respecta a la convergencia, tenga un carácter completamente diferente al de la primera. Observamos que una serie es absolutamente sumable si y sólo si la suma de los términos positivos de la serie y la suma de los términos negativos son ambas convergentes. Se tiene así que *Una serie es absolutamente sumable si y sólo si toda reordenación suya sigue siendo sumable y, además, con la misma suma.*

Enunciamos el siguiente resultado sin más propósito que establecer definitivamente la diferencia entre convergencia condicional y convergencia absoulta en términos de sus propiedades frente a la reordenación.

- (Teorema de reordenación de Riemann) *Toda serie condicionalmente convergente se puede reordenar de modo que la serie obtenida sume un valor previamente elegido. Análogamente, existen reordenaciones de la serie que divergen a* $+\infty$ *o* $-\infty$.

[Ver prácticas 6 y 7]

4. Sobre el cálculo de la suma

Hasta ahora nos hemos dedicado al problema de estudiar la convergencia de una serie, sin embargo, en muy pocos casos hemos conseguido calcular el valor de las sumas; hemos podido hacerlo con las series geométricas, telescópicas y poco más. En la sección Prácticas dedicamos un apartado a obtener fórmulas para la suma de algunos otros tipos de series. Aún así, serán muy pocas las series cuya suma consigamos calcular, al menos "elementalmente". En la mayoría de los casos tendremos que conformarnos con un cálculo aproximado. Vimos ya un método para aproximar la suma de una serie (alternada) con el criterio de Leibniz. Con los ejercicios de Prácticas, nos proponemos deducir algunos métodos para aproximar la suma de series convergentes de términos positivos a partir de los criterios de convergencia que estudiamos para las mismas. Definimos también *resto de la serie* y vemos que este tiende a 0 cuando n tiende a infinito siempre que la serie converja. Quizás, lo más importante es comprender que aproximar la suma de una serie cualquiera se reduce finalmente a acotar los restos de la serie mediante la acotación de los restos de alguna serie mayorante sumable .

5. Introducción a las series de potencias

Ya hemos podido comprobar que hallar la suma de una serie convergente es un problema mucho más difícil que estudiar si converge o diverge. Veamos ahora que en muchos casos el problema se puede plantear, y a veces resolver, en un contexto más amplio; el de *series de funciones* reales. Aunque no tengamos todavía los elementos necesarios disponibles, aprovechamos que un cierto conocimiento de lo que son las funciones, continuidad, derivación e integración los alumnos ya tienen, para discutir de modo expositivo y práctico algunos aspectos de las series de potencias.

El hecho fundamental a considerar es que hay una clase suficientemente amplia de funciones que se pueden "representar" como la suma de series de otras funciones más sencillas. De este modo la suma de muchas series numéricas podrá calcularse si reconocemos una de estas representaciones en serie de una función conocida. Usando como motivación la igualdad $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, válida para $|x| < 1$, mostramos que la noción de *serie de funciones* tiene sentido y que define una función en su *dominio de convergencia*. Es necesario pues introducir el concepto de límite (puntual) de funciones para dar la definición formal de serie de funciones.

En este curso, las series de funciones que realmente nos interesan son las llamadas *series de potencias*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Cuando sea necesario diremos que la expresión anterior es una serie de potencias centrada en x_0. Las series de potencias surgen como soluciones de ecuaciones diferenciales. Pero su relevancia en la teoría de funciones radica en el hecho de que muchas funciones admitirán un desarrollo en serie de potencias, o bien localmente o, con suerte, en todo el dominio de definición de la función.

El teorema de Cauchy-Hadamard (que en principio no demostraremos) asegura que una serie de potencias centrada en x_0 converge (absoluta y *uniformemente, todavía por definir*) en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, para algún número real $0 \leq r \leq \infty$, que se denomina radio de convergencia, y diverge para $|x - x_0| > r$. La convergencia en $x_0 - r$ y $x_0 + r$ hay que estudiarla en cada caso en particular. Además, es posible calcular el radio de convergencia mediante la fórmula de Cauchy-Hadamard; $r = 1/\operatorname{lím} sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Al intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ se le llama *intervalo de convergencia* y al conjunto de puntos donde la serie de potencias converge *dominio de convergencia*.

Analizamos algunos casos sencillos poniendo cuidado en el estudio de la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia.

Cuando se trabaja con límites (puntuales) de funciones en general es natural preguntarse qué propiedades de las funciones sumando se transfieren a la función límite, en nuestro caso, a la suma de una serie de funciones. Una propiedad de las series de potencias que resultará ser especialmente útil es que pueden derivarse e integrarse término a término en el intervalo de convergencia. Reflexionaremos un poco sobre a este hecho. En general, sin embargo, no es así: Sin entrar en detalles, mencionamos que para transferir propiedades tales como la continuidad, derivabilidad e integrabilidad no nos bastará con que la serie converga puntualmente, necesitaremos un tipo especial de convergencia, la *convergencia uniforme*. Como resulta que las series de potencias convergen uniformemente en todo subintervalo cerrado del intervalo de convergencia, esto hace que se verifiquen algunas de las propiedades de ya tenían las sumas finitas: son continuas, derivables e integrables en el intervalo de convergencia. La derivada (integral) será el resultado de derivar (integrar) la suma término a término.

Con esta información, y observando que los desarrollos en serie de potencias centradas en un mismo punto x_0 son únicos en el intervalo común de convergencia, nos resultará ahora más sencillo usar las series de potencias como herramientas para describir funciones. Por ejemplo, una vez conocidos los desarrollos en series de potencias en $|x| < 1$ de las funciones $\frac{1}{1+x}$ y $\frac{1}{1+x^2}$ (son sumas de progresiones geométricas), podemos obtener los desarrollos en serie de potencias para $|x| < 1$ de funciones más complicadas como $\log(1 + x)$ (la serie converge también para $x = 1$) o $arctgx$ (la serie converge también en $x = 1$ y $x = -1$).

En realidad sólo cierto tipo de funciones admite un desarrollo en serie de potencias, pero esta clase incluye un gran número de las que en la práctica usamos. En particular, mostramos los desarrollos de Taylor (que estudiaremos con detalle cuando veamos el capítulo de Cálculo Diferencial) de algunas funciones elementales, prestando especial atención a las funciones exponencial, seno y coseno.

5.1. Introducción a las series complejas de potencias. Muchos de los misterios que entraña la convergencia de series reales de potencias se entienden en el contexto más amplio de las series de funciones complejas. Podemos ilustrar esta afirmación con algún ejemplo vistoso.

No entraremos en la teoría de series complejas; nuestro propósito es simplemente introducir la función *exponencial compleja* y dar a conocer la fórmula de Euler (los estudiantes de Estadística necesitarán conocer la función exponencial compleja cuando estudien la función característica de una variable aleatoria en la asignatura Estadística Matemática). Así, simplemente mostraremos el método para extender una función real, cuando conocemos su desarrollo en serie real de potencias, a una función compleja. Se podrán definir así las funciones seno, coseno y exponencial compleja como series complejas de potencias. Encontramos de este modo la relación entre las tres funciones, la Fórmula de Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

lo que en particular nos da la insospechada relación entre los números e y π; $e^{i\pi} = -1$. Como aplicación de la fórmula de Euler obtendremos las fórmulas de adición trigonométrias, así como la descomposición de las potencias de las funciones trigonométricas reales en factores lineales (lo que nos permitirá su integración inmediata).

6. Prácticas

Además de hacer abundantes ejercicios donde se apliquen los criterios vistos para decidir el carácter de una serie, nos proponemos reforzar los contenidos del capítulo realizando prácticas sobre: sumación de series (pretendemos que el alumno amplíe la lista de familias de series cuya suma sabrá calcular), reordenación (con lo que dejamos claro que las series son objetos muy diferentes a las sumas finitas), cálculo aproximado de las sumas y, finalmente, vemos algunas aplicaciones de las series de potencias. Las prácticas podrían ser las siguientes:

1. **El problema de la mosca y los dos trenes.** Se cuenta que le propusieron a von Neuman el siguiente problema: Tenemos dos trenes que distan 100 Km entre sí. Parten simultaneamente uno hacia el otro, por la misma vía. El tren A viaja a 40 Km/h, y el tren B a 60 Km/h. Cuando los trenes arrancan una mosca sale volando de uno de ellos a 100Km/h en direción al otro tren. Cuando lo alcanza, da la vuelta hasta volver a tocar al primer tren, y así sucesivamente. Cuando los trenes choquen y aplasten entre los dos a la mosca, ¿Cuánto habrá recorrido esta? Y se cuenta que von Neuman respondió al momento: (aquí va la distancia correcta que los alumnos deberan hallar). La ironía se produce porque hay una forma diferente de enfocar el problema que da una respuesta inmediata (aquí va un espacio para que cada alumno piense). De modo que el interlocutor de von Neuman le dijo: “Ah, claro! Se ha dado usted cuenta de que ...”Y von Neuman respondió: “No, yo simplemente sumé la serie”.
2. **El problema de Aquiles y la tortuga.** Tal y como lo cuenta Lewis Carroll, Aquiles se encuentra a una distancia D de una tortuga. Aquiles, el de los pis ligeros es mucho más veloz que la totuga; pongamos diez veces más. El problema es que cuando Aquiles ha recorrido la mitad de la distancia que lo separa de la tortuga, esta habrá avanzado

algo. Y así sucesivamente. ¿Alcanzará alguna vez Aquiles a la tortuga? Carroll dice que no.

3. **Matemáticas frente a ordenadores.** La serie armónica nos ayuda a entender el poder de las matemáicas frente al simple cálculo: utilizar el programa de ordenador o calculadora preferido para inclinarse a creer que, si por los resultados numéricos fuera, ... la serie armónica sería convergente!!
4. **Un problema puramente físico.** Imaginemos que se dispone de una cantidad ilimitada de cubos de plástico de lado 1. Colocamos uno sobre otro en equilibrio. Buscamos la forma de desplazarlo un poco hacia el borde de modo que, manteniendo el equilibrio, el centro del cubo superior se proyecte en vertical lo más lejos posible del centro del cubo base. Probemos con tres cubos, intentando siempre que el centro del cubo superior se proyecte en vertical lo más lejos posible del centro del cubo base. La pregunta es: ¿Cuán lejos s posible que se desplace la royección del centro del cubo superor respecto al centro del cubo base?
5. Con ayuda de un ordenador, se propone encontrar tantas reordenaciones de la serie $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ como se posible de modo que las sumas sean siempre diferentes.
6. Comprobar la validez del teorema de reordenación de Riemann: dado un número real R, obtener un esquema de reordenación de la serie armónica alternada de modo que la suma sea R
7. Estudiar la convergencia y deducir las fórmulas para la suma de las siguientes familias de series:
   - Las series aritmético - geométricas;
   $$\sum(a+nb)x^n$$
   - $\sum p(n)/n!$, siendo $p(n)$ es un polinomio en n con coeficientes reales.
   - Las series hipergeométricas; $\sum x_n$ tales que
   $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{an+b}{an+c},\quad a\neq 0.$$
   - $\sum\frac{p(n)}{q(n)}$, con $p(n)$ y $q(n)$ polinomios en n con coeficientes reales.
8. Compruébese que si en la serie armónica se suprimen los términos en los que la expresión decimal de n tiene algún cero obtenemos una serie convergente (que suma 90).
9. Probar que $\lim 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=e$
10. Obtener aproximaciones del número e con un error menor que $5\cdot 10^{-7}$.
11. Deducir de los criterios de la raíz, del cociente y de Raabe fórmulas para acotar el resto de una serie de términos positivos. Aplicarlos para obtener aproximaciones de las sumas de series cuya convergencia hayamos decidido con dichos criterios. Por ejemplo, la serie $\sum\frac{1}{a_n}$, donde (a_n) es la sucesión de Fibonacci.
   x
12. Del desarrollo en serie de potencias de la función $\log(1+x)$, $|x|<1$, obtener un método para calcular aproximadamente el logaritmo de cualquier número positivo. Basta tener en cuenta que si $-1\leq x<1$,
$$\log\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots).$$

CAPíTULO 4

Generalidades sobre funciones

Primer contacto intuitivo con la idea de función: Ejemplos. Definición de función. Cómo analizar funciones para describir fenómenos y plantear problemas. Gráficas de funciones y su significado.

Funciones elementales: Funciones sencillas. Polinomios y funciones racionales. Raíces. Funciones trigonométricas. Funciones potenciales y exponenciales. Logaritmos.

Objetivos específicos

Esta es una lección eminentemente práctica en la que queremos, fundamentalmente, discutir y corregir las ideas intuitivas que los alumnos tengan sobre las funciones y su comportamiento. También se busca que adquieran familiaridad con las funciones elementales.

1. Funciones elementales

Nos referimos en esta lección a funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Las funciones constantes, las funciones características de un conjunto, la identidad ... son las primeras funciones que uno se encuentra. Además, son fáciles de visualizar. Sus sumas y productos son las que vienen a continuación: entre ellas se encuentran los polinomios (función polinómica sería más preciso) y, en particular, las rectas y parábolas. Es bastante instructivo tratar de dibujar la gráfica de un polinomio de grado dos o tres para, en lecciones sucesivas, ir comparando la intuición inicial con las gráficas cada vez más afinadas que se irán obteniendo a medida que los resultados del cálculo diferencial estén disponibles.

Se puede pensar un poco, con cuidado, en las funciones racionales o cocientes de dos polinomios. Quizá ayude a ver los peligros pensar en funciones como $1/x$ ó $1/(x-2)^2$.

Las funcíones raiz (raiz cuadrada, raíz n-ésima...) vienen a continuación. Es fundamental la intuición para dibujar su gráficas.

Las funciones exponencial y logarítmica son nuestro siguiente objetivo. Recordaremos entonces la definición trigonométrica de función seno, coseno y tangente. Nos ayudará disponer de las fórmulas $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\ cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$ y $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$. Para probarlas necesitamos aquí detenernos un momento a recordar la noción de producto escalar de dos vectores; del que necesitamos saber que se define como $(x, y) \cdot (a, b) = ax + by$. Recordando que si el módulo de (x, y) es $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ por el teorema de Pitágoras, entonces $x = |(x, y)| cos\alpha$ donde $\tan\alpha = y/x$; se obtiene la fórmula mnemotécnica para el producto escalar de (x, y) y (a, b); "módulo de (x, y) por módulo de (a, b) y por el coseno del ángulo que forman". Siguiendo ahora la estrategia de probar primero que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta,$$

que se deriva de que precisamente $\alpha - \beta$ es el ángulo que forman los vectores $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Las fórmulas para el seno y coseno del ángulo suma se siguen sin dificultad.

Por supuesto que también se puede pensar en funciones que se obtengan como suma, producto y cociente de las anteriores, pero bien poco podemos decir por el momento al respecto.

2. Nociones y propiedades básicas

Comenzamos invitando al alumno a dar su propia definición de función.

Aprovechamos para recordar que no siempre las funciones se han definido al modo actual; y proponemos como ejemplo dar funciones $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$. Mostramos diferentes situaciones en las que aparecen funciones, bien sea para describir fenómenos físicos, para plantear problemas (hallar áreas de figuras), para enunciar leyes físicas ...

Una vez tengamos una definición, hablaremos de dominio, imagen e antiimagen de una función y realizamos algunos ejercicios para aprender a calcular estos conjuntos tanto analíticamente como gráficamente.

Hacemos hincapié en que definir una función incluye dar un dominio y un codominio; así, para que dos funciones sean iguales no basta con que tengan la misma fórmula, también deben estar definidas entre los mismos espacios.

Repasamos los conceptos de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva y definimos función inversa. Realizamos algunos cálculos sencillos de inversas al tiempo que advertimos que no siempre que la inversa exista será fácil calcularla.

Definimos gráfica de una función y representamos las primeras funciones elementales: funciones constantes, identidad, funciones afines o polinomios de grado uno, función valor absoluto, función parte entera, polinomios de grado dos...

Dadas dos funciones definimos las funciones suma y producto. Definimos también composición de funciones y vemos algunos ejemplos en los que una función se puede describir como composición de otras.

Se introducen también las nociones de función par y función impar, comprobando que las primeras son simétricas con respecto al eje OY y las segundas lo son con respecto al origen de coordenadas. Definimos función periódica. Se introducen los conceptos de acotación, monotonía y puntos extremos, ilustrándolos con ejemplos.

3. Propiedades de las funciones elementales y sus gráficas

Es ahora el momento de intentar casar las propiedades que hemos introducido con las funciones elementales que hemos recordado. Aunque la mayor parte de las nociones que tratamos en este capítulo pueden suponerse conocidas por el alumno, no estará de más aprovechar la ocasión para ejercitarse en repasar herramientas de cálculo básicas: operaciones con potencias, propiedades de los logaritmos, cálculo de dominios, cálculo de ceros de una función,...

Finalmente, hacemos una exposición general de las funciones tal vez más desconocidas para los alumnos; las funciones hiperbólicas. Resultará muy útil para el alumno disponer de una tabla resumen con todas las funciones elementales que acabamos de mencionar, sus gráficas (aproximadas) y sus propiedades fundamentales.

4. Prácticas

En esta lección, siempre que trabajemos con gráficas, estaremos más interesados en dibujos que muestren características generales.

1. Elegir dos o tres puntos de $\mathbb{R}$: a, b, c por ejemplo. Dibujar la gráfica de la función que asocia a x la suma de distancias a a, b y c.
2. Es bastante ilustrativo pedir al alumno que piense en cómo la gráfica de una función $f(x)$ se vé alterada cuando realizamos ciertas manipulaciones de la variable, por ejemplo: $f(x+a)$, $af(x)$.
3. También proponemos al alumno a reflexionar sobre la gráfica de la inversa de una función (en el caso de que exista), proponiéndole algunos ejemplos concretos.

   Es importante dejar que el alumno compruebe si sus conjeturas son ciertas o no prácticando con ciertas funciones concretas en el ordenador.

4. Será interesante comparar en el ordenador, con el uso de algún programa, las gráficas de las funciones sumas, producto y composición con las gráficas de las fuciones originales.
5. Aprovechamos los mismos ejemplos para visualizar otros conceptos introducidos en la lección. Especialmente imporante es acostumbrarse a reconocer los máximos, mínimos de una función. Hacer esto ahora les dotará de recursos para no fiarse a ciegas de la fórmula "si x es un extremo entonces $f'(x) = 0$".
6. Repasamos la ecuación de una recta y el cálculo de su pendiente.
7. Repasamos la representación gráfica de parábolas.
8. Introducimos las funciones racionales con el ejemplo más sencillo $f(x) = 1/x$ y estudiamos (en lo posible) su gráfica. Aprovechamos para visualizar el conceptos de asíntota. Otros ejemplos interesantes de analizar son $f(x) = x + 1/x$, $f(x) = x/x - 1$ o $f(x) = x/(x-1)(x-2)$.

CAPíTULO 5

Límites de funciones reales de variable real

Introducción de la noción de límite: Motivación. Definición de límite y límites laterales. Ejemplos variopintos. Unicidad del límite.
Propiedades básicas: Límites a través de sucesiones. Operaciones con funciones y límites. Acotación y límites. Orden y límites. Regla del sandwich. Límites de las funciones monótonas. Ejemplos.
Límites infinitos y en el infinito: Definiciones. Extensión de las propiedades básicas (límites, operaciones y orden). Indeterminaciones.
Límites de funciones elementales: Estudio analítico y gráfico de los límites de funciones elementales. Orden de infinitud. Equivalencia de infinitos e infinitésimos.
Cálculo de límites: Técnicas básicas para el cálculo de límites. Ejercicios. Visualizaciones gráficas.

1. Objetivos

- Comprender la noción de límite y su definición épsilon-delta.
- Adquirir herramientas para el cálculo de límites.
- Saber interpretar límites en diferentes situaciones. Reconocer su utilidad para estimaciones y descripciones de comportamientos asintóticos.

2. Introducción a la noción de límite

Motivamos la necesidad de introducir la noción de límite con un sencillo ejemplo: cómo se puede calcular la velocidad instantánea de una partícula: si $s(t)$ denota la distancia recorrida por la partícula en un tiempo t, el cociente

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

se interpreta de modo natural como la velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo entre t y $t+h$.

Sin embargo, si el movimiento no es uniforme (caída libre de un cuerpo, lanzamiento vertical, el movimiento del pistón de un cilindro...), la velocidad media no puede caracterizar con la debida precisión la rapidez del desplazamiento de la partícula en el instante t. Obtendremos mayor precisión en la expresión de la velocidad real cuanto más pequeño sea el incremento de tiempo h. Por tanto, una definición razonable de velocidad de la partícula en el instante t será el límite:

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Procedemos a continuación a dar una aproximación a la definición formal de límite de una función f en un punto a. Que l sea el límite de f en a siginfica que:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

Generamos una discusión con los alumnos sobre la definición anterior. La discusión comprenderá los siguientes puntos:

- Jugar al juego ε - δ con la gráfica de alguna función concreta: el alumno debe elegir un candidato a límite l simplemente observando la gráfica y cada vez que elija un entorno de l nosotros encontramos un entorno del a de modo que las imágenes de los puntos de dicho entorno caigan dentro del elegido para l.
- El límite de una función en un punto debe ser único.
- El punto a donde se estudia el límite no pertenece necesariamente al dominio de la función f.
- Para que tenga sentido preguntarse por el límite de f en a, alertamos sobre la necesidad de que haya puntos cercanos a "a" en el dominio de definición de f, que bien podría no haberlos (algún ejemplo vistoso ayudará).

Después de esta discusión debería ser claro que debemos retocar la definición de límite que acabamos de dar. La definición definitiva es la siguiente: diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto a si a es un punto de acumulación de D y si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Escribiremos $l = \lim_{x\to a} f(x)$. Verificamos algunos ejemplos sencillos de límites: de funciones constantes, identidad, x^2,...; y otros no tanto, como funciones escalonadas, $1/x$ ó $x \operatorname{sen} 1/x$. Para futuro uso, y porque ayuda a estudiar la continuidad de una función escalonada, se definirán los límites laterales.

3. Propiedades básicas

3.1. Límites de funciones usando sucesiones. Reformulamos el concepto de límite de una función en términos de límites de sucesiones: sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de D,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff [\forall\ (a_n) \subset D\ (a_n \neq a),\ \lim a_n = a, \Rightarrow \lim f(a_n) = l]\,.$$

Con esta caracterización, los resultados que vimos en el capítulo de sucesiones quedan ahora a nuestra disposición para el cálculo de límites de funciones. Este criterio también resulta útil para probar la no existencia de límites, véase por ejemplo $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 1/x$.

3.2. Límites y operaciones. Las primeras herramientas para el cálculo efectivo de límites las encontramos en la (buena) interacción entre límites y operaciones aritméticas con funciones. Así, el límite en un punto de una suma (producto) de funciones cuyos límites en dicho punto existen será la suma (producto) de los límites. Para que el límite "respete" cocientes necesitamos que la función denominador tenga límite distinto de cero en el punto que estamos considerando.

Estas propiedades se siguen inmediatamente de las análogas para sucesiones y de la caracterización de límites a través de sucesiones. Lo mismo ocurre con los límites de las funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas. No obstante, las pruebas para las propiedades en relación con las operaciones aritméticas se pueden proponer como ejercicio para reforzar la habilidad con la definición ε-δ de límite. Los límites de muchas funciones, como por ejemplo las funciones racionales, son ahora considerablemente más sencillos de calcular.

3.3. Límites, acotación y orden. Si bien es claro que una función acotada puede no tener límites –y no estaría de más pedir a los alumnos ejemplos–, si una función tiene límite en un punto entonces está acotada en un entorno de dicho punto. De gran utilidad en el cálculo de límites será el resultado: *El producto de una función acotada por otra que tiende a cero en un punto tiende a cero en ese mismo punto.* Este resultado se obtiene fácilmente de la caracterización de límite de una función a través de límites de sucesiones y del resultado análogo para sucesiones.

En cuanto a la relación entre orden y límites, los resultados para sucesiones se trasladan a funciones; así, si $\lim_{x\to a} f(x) = a$ y $\lim_{x\to a} g(x) = b$ entonces

1. Si $b < c$, entonces $f < g$ en algún entorno de a, salvo quizás en a, perteneciente al dominio de definición de ambas funciones.
2. En particular, una función conserva el signo del límite en a en puntos suficientemente próximos a a (salvo quizás en a).
3. Recíprocamente, si $f \leq g$ en un entorno de a dentro del dominio común de definición entonces $a \leq b$.

Algunos ejemplos mostrarán que en ninguno de los enunciados anteriores se pueden intercambiar $<$ y $\leq$.

Probamos finalmente la regla del sandwich, que es completamente análoga a la correspondiente para sucesiones. Podemos poner en práctica dicha regla con algunos ejemplos. Un límite como $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} 1/x$ será ahora inmediato.

4. Límites infinitos y en el infinito

Definimos límites infinitos (en un punto) y límites en el infinito. Ayuda al principio a no perderse observar que en general ε, δ representan números pequeños y M números grandes. Diremos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0 \; \exists \, \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Análogamente se define $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. En cuanto a los límites en el infinito, diremos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, M > 0 : M < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Análogamente se define $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$.

Comprobamos que con esta ampliación de la noción de límite sigue habiendo unicidad y también se mantiene la caracterización a través de sucesiones. Las operaciones algebraicas con límites se extienden naturalmente a estos nuevos casos, eso sí, teniendo en cuenta que pueden darse indeterminaciones que no se resuelven con las reglas ordinarias (lo que simplemente se deriva de que $+\infty, -\infty$ no son números reales, precisamente porque no suman, multiplican etc de mismo modo que los demás).

5. Límites de funciones elementales

Se estudiará la existencia de límites para las funciones elementales, y sus implicaciones en la gráfica de la función. El esquema a seguir será

1. Límites de polinomios. Poco queda que decir ya, pero revisamos los resultados que tenemos.
2. Discutir los casos que se saben resolver ya de funciones racionales y los que quedan indeterminados. Y por qué.
3. Recordar lo que ocurre con las función raíz cuadrada.
4. Las funciones exponencial y logarítmica no deberían dar más dificultad que recordar su definición.
5. Los límites de la funciones trigonométricas se pueden calcular utilizando con habilidad las fórmulas el seno y coseno de la suma.
6. Estudiar otras funciones elementales interesantes, como el módulo, las funciones escalonadas, etc

6. Cálculo de indeterminaciones

Comenzamos estudiando el orden de infinitud de algunas funciones: si escribimos $f(x) \ll g(x)$ para indicar que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, tendremos que :

$$\log x \ll x^a \ll b^x \ll x^x, \qquad a > 0,\ b > 1.$$

Dos funciones f y g se dicen equivalentes en a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ mientras que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ se dice que f y g son infinitésimos equivalentes en a. Si, en cambio $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ hablamos de infinitos equivalentes.

Es una discusión muy interesante ver qué infinitos e infinitésimos consideran los alumnos equivalentes pidiéndoles que hagan sus propuestas. A continuación se procede a demostrar/refutar cada una para finalmente presentar una lista de algunos infinitésimos equivalentes.

La cuestión sobre la razón de ser de los infintésimos equivalentes se encara a continuación: ayudan a resolver indeterminaciones. Ponemos entonces en práctica las herramientas que hemos adquirido a lo largo del capítulo para resolver indeterminaciones. Recordamos que las representamos simbólicamente: $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 1^∞ y 0^0. Aunque no existen reglas generales para resolver estas indeterminaciones resulta de gran ayuda saber que todas se reducen a la primera: las del grupo $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$ y $\frac{\infty}{\infty}$ se reducen de forma obvia, si acaso merece mencionarse que para $\infty - \infty$ hacemos

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Las de la forma potencial se convierten en una de las anteriores teniendo en cuenta la igualdad

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}, \quad f(x) > 0.$$

Para resolver indeterminaciones muchas veces se trata sólo de reemplazar una función por otra equivalente en el sentido que acabamos de ver. Eso sí, sujetos a las reglas de sustitución, que son exactamente las mismas que veíamos para el cálculo de límites de sucesiones. El caso más simple que podemos resolver con esta técnica sería el de las funciones racionales. Veremos otros ejemplos, quizás no tan triviales, en los que llevar a cabo efectivamente dichas sustituciones. En general, será preciso hacer ejercicios de corte clásico para adquirir habilidad con la técnica de los infinitésimos e infinitos equivalentes.

7. Prácticas recomendadas

1. *Cálculo de límites*. En este caso se trata de hacer ejercicios de cálculo de límites hasta conseguir familiarizarse con las técnicas. Advirtiendo, eso sí, que no siempre habrá una regla para calcular un límite, que es más bien un trabajo artístico.
2. Es un ejercicio interesante reflexionar sobre las relaciones entre monotonía de una función y la existencia de límite. ¿Hasta qué punto ocurre lo mismo que con sucesiones? El ejemplo de la función $f(x) = 0$ para $x < 0$ y $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ debería dar una pista. Queda claro entonces que para que una función monótona tenga límite no basta con que esté acotada; en cada punto existirán los límites laterales, aunque, claro está, pueden no coincidir. Es decir, lo que se tiene es que si una función f es monótona en un intervalo acotado (a, b), entonces siempre existen sus límites en los extremos del intervalo, que, obviamente, serán finitos sólo si la función está acotada. En ese caso los límites coincidirán con el supremo e ínfimo de los valores de la función en dicho intervalo.
3. Puede ser interesante proponer el cálculo de $\lim_{x\to 0} x^x$, $\lim_{x\to 0} x^{(x^x)}$, ...

CAPíTULO 6

Continuidad de funciones reales de variable real

Continuidad en un punto: Motivación: ¿Por qué la continuidad es una propiedad fundamental de las funciones? Noción gráfica de continuidad y definiciones equivalentes. Ejemplos. Caracterización de la continuidad a través de sucesiones. Estabilidad de la continuidad por operaciones y composición. Clasificación de discontinuidades. Ejemplos.

Los teoremas fundamentales: Continuidad lateral. Definición de continuidad en un intervalo. Ejemplos. Teorema de Weirstrass. Teorema de Bolzano. Teorema de los valores intermedios de Darboux. Aplicaciones.

Continuidad y monotonía: Relación entre la monotonía y la continuidad de una función. Continuidad de la función inversa. Aplicaciones. Discontinuidades de las funciones monótonas. Visualización.

Continuidad uniforme: Definición de continuidad uniforme y función lipschitziana. Visualización. Teorema de Heine. Aplicaciones.

Sucesiones de funciones y series de potencias: Nociones de convergencia y límite uniforme. Continuidad del límite uniforme de funciones continuas. Series de funciones. Prueba M de Weierstrass. Ejemplos y aplicaciones.

Objetivos

- Comprender la noción de continuidad en un punto, su definición epsilon-delta, su interpretación gráfica y su relación con el límite.
- Disponer de ejemplos de funciones continuas y no-continuas.
- Saber que las funciones elementales son continuas y saber usarlo, junto a las propiedades de la continuidad con respecto a operaciones, para estudiar la continuidad de otras funciones.
- Entender los teoremas fundamentales, su interpretación gráfica y saber aplicarlos en situaciones concretas.
- Comprender las noción de continuidad uniforme.
- Entender y distinguir los conceptos de convergencia puntual y uniforme.

1. Continuidad en un punto

La mayoría de los fenómenos físicos que podemos contemplar a nuestro alrededor son "continuos": caída de cuerpos, lanzamiento de un proyectil, movimiento armónico, dilatación, trayectorias de persecución,... – O lo parecen a primera vista; no está de más advertírselo al alumno sin querer iniciar la discusión cuántica, ni de las teorías del caos, ni de la teoría de catástrofes. Así pues, la mayoría de los fenómenos físico se describen al modo clásico utilizando funciones continuas.

1.1. La definición de función continua en un punto. Introducimos intuitivamente la noción de función continua en un punto a como aquella cuyos valores en las proximidades de a se parecen al valor que toma la función en a. A continuación, damos la definición rigurosa: una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Procede una discusión sobre la definición que incluya los siguientes puntos:

- ◇ Recordando la noción de punto de acumulación de un conjunto y de punto aislado, observamos que la definición anterior es equivalente a: f *es continua en* a *si*
  - *O bien* a *es un punto aislado de* A.
  - *O bien* a *es un punto de acumulación de* A *y* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- ◇ Ejemplos sencillos de funciones continuas con (o sin) puntos aislados en su dominio.
- ◇ Si a es un punto de acumulación de A entonces tenemos otra formulación equivalente, y probablemente más familiar : f en continua en a si,
  - f está definida en a.
  - Existe el límite de f en a.
  - $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

A continuación comprobamos la continuidad de las funciones sencillas (constantes, la identidad,...) y la no continuidad de algunas funciones concretas (escalonadas, $1/x$ o, un caso más complicado,

$$f(x)\begin{cases} 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \\ 0, & x \text{ racional.} \end{cases}$$

La caracterización de continuidad a través de sucesiones se sigue de forma inmediata de la correspondiente para límites; si a es un punto de acumulación del dominio de definición de f, tendremos que f es continua en a si y sólo si para toda sucesión $x_n \to a$, se tiene $f(x_n) \to f(a)$. Obviamente, de las propiedades de los límites se sigue que la suma, el producto y el cociente (cuando el denominador es no nulo en el punto considerado) de funciones continuas en un punto es una función continua. De estas propiedades ya podemos deducir la continuidad de algunas funciones elementales como las polinómicas y las racionales. La continuidad de las funciones sen y cos se puede derivar de las fórmulas para el ángulo suma; y la de la función exponencial de su definición; mientras que para la función logaritmo debemos esperar un poco. La composición de $g \circ f$ de dos funciones continuas es también una función continua; precisamente, si f es continua en $g(a)$ y g es continua en a, entonces $g(f)$ es continua en a. Las funciones máximo y mínimo de dos funciones continuas son también continuas.

1.2. Clasificación de discontinuidades. Si una función es discontinua en un punto $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$. Y esto sólo puede ser porque no hay función en el punto, no hay límite en el punto o no coinciden. Dependiendo del caso, se tienen los siguientes tipos de discontinuidades que una función puede presentar: una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ presenta en un punto $a \in A$ una discontinuidad:

- Evitable: a es un punto de acumulación de A y existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero $f(x) \neq f(a)$. Ejemplo:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
- De salto: si a es un punto de acumulación de A y existen (en sentido amplio) los límites laterales en a. Se dice de salto finito si los ambos límites son reales, por ejemplo: $f(x) = x/|x|$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ en 0. Se dice de salto infinito si uno o ambos límites laterales son infinitos:
$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
- Esencial o de segunda especie: si a es un punto aislado o, siendo a de acumulación, alguno de los límites laterales no existe. Ejemplos:
$$f(x) = \begin{cases} sen 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. Los teoremas fundamentales

2.1. Continuidad en intervalos. El concepto de continuidad se vuelve más interesante cuando la función es continua en todos los puntos de un intervalo, de hecho, suele decirse que es la primera condición que debe verificar una función razonable. Decimos que una función es continua en un conjunto si es continua en cada punto de dicho conjunto. Debería ser entonces claro ahora el significado de ser continua en un intervalo, abierto o cerrado. Precisemos, por si acaso, que la definición de continuidad nos dice que $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en los puntos a y b si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b^-} f(x) f(b).$$

Observemos que, si bien la gráfica de una función puede ayudarnos en muchos casos a tener una intuición buena sobre la continuidad de la función, es muy importante advertir que es fácil engañarse. Véase por ejemplo lo que ocurre con la función:

$$f(x) \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Este ejemplo muestra que la noción intuitiva de una función continua como aquella “cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel” es deficiente.

2.2. Los teoremas fundamentales. En esta lección enunciamos y probamos tres teoremas fundamentales sobre funciones continuas y mostramos algunas de sus aplicaciones. Estos resultados son de una naturaleza completamente distinta a los que hemos visto hasta ahora; describen el comportamiento de una función no sólo *localmente* sino en todo un intervalo.

TEOREMA 2.1 (Teorema de Weierstrass). *Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Entonces f está acotada y alcanza los valores máximo y mínimo.*

INDICACIONES PARA LA PRUEBA. .

- Si f no estuviera acotada tendría algún punto de discontinuidad: es claro que en alguna sucesión los valores de la función se van a infinito; y el Teorema de Bolzano-Weierstrass aplicado a la sucesión dada, permite extraer una subsucesion convergente. Y en su límite la función no podrá ser continua.
- Para ver que el supremo y el ínfimo de la función se alcanzan utilizar de nuevo el teorema de Bolzano - Weierstrass.

□

Observemos que sin la hipótesis de que el intervalo sea cerrado y acotado no se puede asegurar el resultado: la función identidad es el ejemplo más trivial; la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$, definida en $[0, +\infty)$ es continua y acotada, pero el extremo superior es 1, que no coincide con el valor de la función en ningún punto. Lo mismo ocurre con la hipótesis de continuidad, tómese como ejemplo cualquier función con discontinuidad infinita de segunda especie ($f(x) = 1/x$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$, nótese también que esta función es continua en $(0, 1)$ pero no está acotada en ese intervalo).

Cada uno de los dos siguientes resultados puede obtenerse como consecuencia del otro. La elección de orden que hacemos atiende al criterio de seguir demostraciones constructivas.

TEOREMA 2.2 (Teorema de Bolzano). *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Se discute la demostración y se observa que el teorema proporciona un algoritmo para calcular y aproximar ceros de funciones. Con el Teorema de Bolzano es fácil ver que si una funciónf es continua en un intervalo $[a, b]$ entonces toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Más formalmente:

COROLARIO 2.1 (Teorema de los valores intermedios de Darboux). *Si I es un intervalo (en sentido amplio) y f es una función real continua en I, entonces $f(I)$ también es un intervalo (en sentido amplio).*

Es fácil encontrar ejemplos que muestren que las condiciones que hacen de $f(I)$ un intervalo no se pueden relajar: bien sea funciones no continuas definidas en un intervalo (cualquier función escalonada) o funciones continuas definidas en un no-intervalo (la función $[0,1] \cup [2,3]$, $f(x) = 0$, si $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 1$, si $2 \leq x \leq 3$).

3. Continuidad y monotonía

Puesto que las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$ están intimamente conectadas con su estructura de orden es natural estudiar la relación entre funciones monótonas y continuidad.

TEOREMA 3.1. *Sea f una función continua estrictamente creciente (resp. decreciente) definida en un intervalo I tal que $f(I)$ es también un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces f y f^{-1} son funciones continuas.*

Observemos que es esencial la hipótesis de que $f(I)$ sea también un intervalo: la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

es una biyección sobre $[0,1] \cup [2,3]$ estrictamente creciente pero presenta en 1 una discontinuidad.

En conjunto, teniendo en cuenta ahora el teorema de los valores intermedios, obtenemos:

TEOREMA 3.2 (Continuidad de la función inversa). *Sea f una función real continua e inyectiva en un intervalo I. Entonces f es estrictamente creciente (resp. decreciente) y continua en I y la inversa f^{-1} es también estrictamente creciente (resp. decreciente) y continua.*

Suponiendo probada la continuidad de la función exponencial, podemos deducir según el teorema anterior, la continuidad de la función logaritmo. De donde, usando tamibién la continuidad de la composición, obtenemos que x^x y la función potencia de exponente real son continuas en todo su dominio de definición.

Finalmente, aunque no lo demostraremos, enunciaremos el siguiente resultado sobre el tipo de discontinuidades que una función monótona puede tener: *Las únicas posibles discontinuidades de una función monótona son de salto. Además, toda función monótona tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades.*

4. Continuidad uniforme

4.1. Funciones lipschitzianas. Definimos en primer lugar *función lipschitziana* y ponemos algunos ejemplos (aplicación lineales en $\mathbb{R}$, x^2 en cualquier intervalo $[0,b]$, $b > 0$,....). La condición de que una función f sea lipschitziana en un intervalo I puede interpretarse geométricamente del siguiente modo: las pendientes

$$\left| \frac{f(x) - f(s)}{x - s} \right|$$

de todos los segmentos uniendo dos puntos $(x, f(x))$, $(s, f(s))$ de la gráfica de f sobre I son acotadas.

Las funciones lipschitzianas en realidad son más abundantes de lo que en principio puede parecer. Como veremos más adelante, *toda función cuya derivada esté acotada es lipschitziana*. Por ejemplo, se sigue de este resultado que las funciones seno y coseno son lipschitzianas en toda la recta real.

4.2. Funciones uniformemente continuas. Introducimos intuitivamente la noción de continuidad uniforme mostrando algunos ejemplos, como la identidad.

Se trata de mostrar que, en algunos casos, el δ de la definición de continuidad no depende del punto, sólo de ε. Damos entonces la definición formal epsilon-delta. Para familiarizarse con la noción probamos que la suma, el producto por escalares y la composición de funciones uniformente continuas son funciones uniformemente continuas.

Es inmediato comprobar que toda aplicación lipschitziana es uniformemente continua. Que el recíproco no es cierto puede verse por ejemplo con la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$. Es inmediato también que toda función uniformemente continua en un intervalo es continua en dicho intervalo, y es fácil porner ejemplos que muestran que el recíproco no es cierto: x^2 es continua en $\mathbb{R}$ pero no uniformemente continua. La función $1/x$ es continua en $(0, 1]$ pero no uniformemente continua (aunque sí lo será en cualquier intervalo $[a, +\infty)$, $a > 0$).

Es una buena idea pedir a los alumnos que intenten dar algún ejemplo de función continua en $[0, 1]$ no uniformemente continua. Cuando se rindan, demostramos el siguiente resultado:

Teorema 4.1 (Teorema de Heine). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado de la recta real es uniformemente continua en dicho intervalo.*

5. Sucesiones y series de funciones

El objetivo de esta sección es profundizar un poco más en la teoría de series de potencias que ya se trató en el capítulo dedicado a series. Ya advertiamos entonces que la convergencia puntual de una sucesión de funciones no es suficiente para transferir las "buenas" propiedades de las funciones de la sucesión al límite. Concretamente, la continuidad. El ejemplo de las funciones x^n en $[0, 1]$ muestra que un límite puntual de funciones continuas no es necesariamente continuo.

5.1. Convergencia uniforme. Definimos convergencia uniforme de funciones sobre un conjunto en la versión más sencilla posible. Una posibilidad es definir previamente la distancia entre dos funciones sobre un conjunto A;

$$d_A(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}.$$

Así, decimos que una sucesión (f_n) converge uniformemente a f sobre A si $\lim d_A(f_n, f) = 0$. Con esta definición la interpretación gráfica es clara: las máximas desviaciones verticales entre las gráficas de las funciones debent tender a 0.

Obviamente, la convergencia puntual es una condición necesaria para la convergencia uniforme, y el ejemplo anterior muestra que no es una condición suficiente. La lección culmina por tanto con:

Teorema 5.1. *El límite uniforme de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ es una función continua en $[a, b]$*

5.2. Series de funciones. Transferimos todo lo visto a series de funciones y podemos verificar la definición de convergencia uniforme de una serie de funciones en algún caso concreto. También podemos deducir directamente de la definición que la serie $\sum x^n$, cuyo intervalo de convergencia (puntual) recordemos que es $(-1, 1)$, no converge uniformemente en $(-1, 1)$. Para estudiar la convergencia uniforme de una serie de funciones resultará muy útil el siguiente criterio (que además es muy sencillo de probar):

Teorema 5.2 (Prueba M de Weierstrass). *Sean $\sum f_n$ una serie de funciones y $\sum c_n$ una serie de números reales convergente. Si $|f_n(x)| \le c_n$ para todo x de un conjunto I, entonces la serie $\sum f_n$ es uniformemente convergente en I (además, absolutamente convergente en cada $x \in I$).*

La sucesión $f_n(x) = 1/10^n[10^n x]$ ilustra una sencilla aplicación del criterio anterior.

Analizamos finalmente con más detalle el caso particular de las series de potencias y comprobamos que convergen uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado del intervalo de convergencia. Como consecuencia, el límite de una serie de potencias es una función continua en su intervalo de convergencia.

6. Prácticas recomendadas

1. Comprobar la continuidad de las funciones elementales.
2. Estudiar la continuidad de
$$f(x) \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
3. Comprobar que la ecuación $xe^x - 2 = 0$ tiene una raíz en $[0, 1]$. Usando el método de Bolzano, hállense aproximaciones con un error menor que 10^{-2}.
4. Comparar el método de Bolzano para hallar raíces con el de Newton que ya mostramos en el capítulo de sucesiones.
5. Una persona sale de su casa a las dos de la tarde para recorrer un camino de montaña hasta un albergue, adonde llega a las ocho de la tarde. Pasa la noche en el albergue y al día siguiente emprende el camino de regreso a las dos de la tarde y llega a su casa a las ocho. ¿Habrá algún punto del camino por el que ha pasado los dos días a la misma hora?
6. Toda función continua $[0, 1] \to [0, 1]$ tiene un punto fijo; es decir, un punto p donde $f(p) = p$. Un ordenador puede ayudar a visualizar la situación. Y el ejemplo anterior también (basta pensar que son dos personas haciendo el recorrido en el mismo día). Y el teorma de Bolzano.
7. Por tanto, es teoricamente posible dividir un sandwhich con no importa que forma en dos partes exactamente iguales haciendo un sólo corte recto con un cuchillo.
8. ¿Tiene también toda función continua de la circunferencia unidad en sí misma un punto fijo? Si la respuesta fuera no, ¿tiene toda función continua de un inervalo (en sentido amplio) de $\mathbb{R}$ en sí mismo un punto fijo? ¿Cómo diseñar pues un algoritmo para encontrar los puntos fijos de una función? Un ordenador puede ser de ayuda aquí.
9. Ya vimos teoricamente que todo número positivo posee alguna raíz cuadrada. Si el método anterior funciona, usarlo para encontrala (corte de la recta que pasa por $(0, 0)$ y (a, p) con x^2: buscamos a).
10. Diseñado un mecanismo para encontrar puntos fijos, veremos que el que la función sea lipschitziana con constante $L <$ ayuda.
11. Si n es impar, entonces cualquier polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ posee una raíz.
12. Aplicar la prueba M de Weierstrass para decidir la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ de las series trigonométricas $\sum a_n \cos nx$ y $\sum b_n sennx$ cuando las series numéricas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes.

CAPíTULO 7

Diferenciabilidad

Función diferenciable en un punto: Motivación. Definición de función diferenciable y derivada en un punto. Ejemplos. Interpretación geométrica. Derivadas laterales, puntos angulosos y derivadas infinitas. Teorema de Caratheodory. Derivada en un punto y continuidad.
Cálculo de derivadas: Linealidad de la derivada. Derivada del producto, cociente. Regla de la cadena. Derivación de la función inversa. Ejemplos.
Derivada de las funciones elementales: Derivabilidad usando la definición: funciones afines, seno y coseno. Derivada de la función logarítmica. Método de la derivada logarítmica. Derivadas de las potencias reales, funciones exponencial y exponencial compuesta. Derivada de las funciones racionales. Derivada de las funciones hiperbólicas. Derivada de la tangente y cotangente. Derivación de las funciones trigonométricas inversas.
Derivadas de funciones implícitas y parametrizadas: Funciones implícitas. Derivada de una función dada paramétricamente. Interpretaciones geométricas y aplicaciones.
Derivadas de orden superior: Definición. Ejemplos. Interpretación geométrica y aplicaciones.

Objetivos específicos

- Conocer la definición de derivada y su interpretación geométrica.
- Entender la derivación como una propiedad de aproximación de funciones.
- Conocer y dominar las reglas de derivación de funciones. Conocer también los métodos de derivación de funciones definidas implícita o paramétricamente.

1. Función diferenciable en un punto

Ya vimos que a través del concepto de límite se puede determinar la velocidad de un cuerpo con movimiento no uniforme: si el desplazamiento de la partícua viene dado por una función $s(t)$ que depende de la variable tiempo t, veíamos que la velocidad de la partícula en un instante t es el límite del incremento $\triangle s$ cuando el incremento de tiempo $\triangle t$ tiende a 0,

$$v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t+\triangle t) - s(t)}{\triangle t}.$$

Dicho límite es, por definición, la derivada de la función s en el punto t. Así, dada una función f definida en un entorno de un punto a, se dice que f es derivable en a si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dicho valor recibe el nombre de derivada de la función f en a. Una formulación equivalente de la derivada en a, quizás más familiar para el alumno es:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En general, la noción de derivada es el instrumento más útil para modelizar la noción de cambio. Como ya hemos visto, si la variable independiente es el tiempo y la dependiente el espacio, el cociente de incrementos corresponde a la velocidad media en el intervalo dado y la derivada a la velocidad instantánea en el momento elegido. Si la variable dependiente es la velocidad lo que se tiene son las nociones de aceleración media y aceleración instantánea.

Podemos practicar con la definición hallando la derivada de las funciones $f(x) = |x|$; o también $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$; y $f(0) = 0$, en los puntos en los que exista. Estos ejemplos pueden servir para llamar la atención sobre el hecho de que la derivada de una función en un punto puede no existir. De hecho, puesto que por definición la derivada en un punto es un límite, pueden presentarse todas las situaciones que caben en el estudio de un límite. En los puntos en los que el límite no exista o sea infinito diremos que la función no es derivable. Si existen límites laterales diremos que la función tiene derivadas laterales. Todas estas situaciones dan lugar a diferentes patologías en la derivada que interpretaremos geométricamente en la siguiente sección.

1.1. Interpretación geométrica de la derivada. El cociente de incrementos $f(x) - f(a)/x - a$ es la pendiente de la cuerda que une el punto $(a, f(a))$ con $(x, f(x))$. Por tanto, la derivada de f en a, si existe, corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a)$. Dicha recta tangente es la gráfica de la función afín $x \in \mathbb{R} \to f'(a)(x - a) + f(a)$.

Podemos ahora visualizar gráficamente las diferentes situaciones que pueden presentarse en el estudio del *límite-definición*:

$\diamond$ *Derivadas infinitas.* Que el incremento de cocientes tienda a infinito cuando nos acercamos al punto a significa que los segmentos que unen los punto $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ tienden a una recta "con pendiente infinita", es decir, vertical, que pasa por el punto $(a, f(a))$. Aunque en este caso haya recta tangente a la gráfica, la función no será derivable en a; algunas veces diremos que la función tiene en a derivada "infinita". Ponemos algunos ejemplos con los que visualizar fácilmente este fenómeno: la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0 aunque tiene una tangente vertical en dicho punto. Un poco peores son los casos $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, y $f(x) = \sqrt{|x|}$

$\diamond$ *Puntos "angulosos".* Decimos que un punto a es anguloso para la función f si existen las derivadas laterales de f en a pero no coinciden. Por ejemplo, 0 es un punto anguloso de la función $f(x) = |x|$ y también de la función

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$\diamond$ *Las derivadas laterales no existen.* Estúdiese por ejemplo la derivada en 0 de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, en contraste con el último ejemplo, comprobamos que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

sí es derivable en 0.

1.2. Continuidad y diferenciabilidad. Empezamos probando un sencillo resultado que muestra un aspecto de la diferenciabilidad quizás un poco sorprendente para el alumno; la diferenciabilidad de una función cabe entenderse como una condición de aproximación.

TEOREMA 1.1. *Sea f una función definida en un entorno I de a. La función f es derivable en a si y sólo si existe $k \in \mathbb{R}$ y una función γ definida en cierto entorno reducido U de a verificando $\lim_{x \to a} \gamma(x) = 0$ tales que*

$$f(x) - f(a) = k(x - a) + |x - a|\gamma(x), \quad x \in I \cap U.$$

En cuyo caso, $f'(a) = k$.

Una variante menos fina del resultado anterior pero probablemente más fácil de manejar (resultará útil para probar la regla de la cadena y la fórmula de la derivada de la función inversa) es:

TEOREMA 1.2 (Teorema de Carathéodory). *Sea f una función definida en un entorno I de un punto a. La función f es derivable en a si y sólo si existe una función φ continua en I tal que*

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a), \quad x \in I.$$

En cuyo caso $\varphi(a) = f'(a)$.

Es inmediato ahora comprobar el siguiente resultado fundamental en el cálculo diferencial:

TEOREMA 1.3. *Si f es una función derivable en a entonces f es continua en a.*

Se anima aquí al alumno a que verifique este resultado directamente de la definición.

Ya hemos tenido ocasión de comprobar con la función $f(x) = |x|$ que el recíproco no es cierto. Un poco más raros son los ejemplos de funciones continuas con una cantidad infinita de puntos donde no es derivable (véase la práctica n^{o} 1).

2. Cálculo de derivadas

Dada una función f, se entiende como función derivada de f la función f' definida como $x \to f'(x)$ en el conjunto de puntos donde f es derivable. A veces se usa la notación df/dx para la derivada, lo que no deja de ser arriesgado. Cuando hablamos de función diferenciable en un intervalo abierto I entendemos que la función es derivable en todo punto del intervalo. Si el intervalo es cerrado, entenderemos que existen las derivadas laterales en los extremos.

Es un sencillo ejercicio probar que la derivada de una función constante es 0. Y que la derivada de la función identidad es 1. Es también sencillo probar que la derivación es lineal, en el sentido de que

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'.$$

Probamos que el producto de funciones diferenciables también lo es y la regla de Leibniz para la derivada del producto:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

A continuación probamos la fórmula de la derivada de $1/f$ en a cuando $f(a) \neq 0$. Como consecuencia obtenemos la fórmula de la derivada del cociente f/g cuando $g(a) \neq 0$. La regla de la cadena o regla para la derivación de la composición de funciones, se lleva el resto de nuestros esfuerzos; precisamente

$$\left(f(g)\right)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

siempre que lo anterior tenga sentido. La demostración puede hacerse mediante la definición de derivada o recurriendo al Teorema de Caratheodory.

Finalmente, probamos el teorema de diferenciabilidad de la función inversa;

TEOREMA 2.1. *Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo I y sea $J = f(I)$. Si f es derivable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$ entonces la inversa f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$ y $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$.*

3. Derivada de las funciones elementales

• *Derivada de funciones polinómicas.* De la fórmula del producto, la derivada de las funciones constantes e identidad, se sigue que todo polinomio (función polinómica sería más preciso)

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

es una función diferenciable con derivada

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

• *Derivada de la función logarítmica.* Consideremos la función $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$ y definida para $x > 0$. De la definición del número e, basta aplicar la definición de derivada para comprobar que f es diferenciable en todo $x > 0$ y que su derivada es $f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$. Basta hacerlo para $a = e$: ya que

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h}\log(1+\frac{h}{x}) = \frac{1}{x}\frac{x}{h}\log(1+\frac{1}{x/h}) = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$ de la definición del número e se sigue que $(\log)'(x) = \frac{1}{x}$.

• *Derivada de las funciones potencial, exponencial y exponencial compuesta.* Consideremos las funciones $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, para $x > 0$; $g(x) = a^x$, $a > 0$ y, en general $h(x) = (u(x))^{v(x)}$, con u y v funciones reales "adecuadas". Sus derivadas pueden obtenerse tomando logaritmos y aplicando la regla de la cadena. Es decir, para una función F general (aunque adecuada) se tendría

$$F'(x) = F(x)(\ln F(x))'$$

que se conoce como el *método de la derivada logarítmica* y que se puede aplicar a toda función real derivable que tome valores positivos. Obtenemos de este modo que las funciones anteriores son derivables en su dominio de definición y $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $g'(x) = a^x \ln a$ y $h' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$.

• *Derivada de las funciones racionales.* Se sigue de aplicar la regla de derivación de un cociente y conocer la derivada de las funciones polinómicas.

• *Derivada de las funciones hiperbólicas.* Conociendo la derivada de la función exponencial es inmediato obtener las derivadas de las funciones $Chx = (e^x + e^{-x})/2$ y $Shx = (e^x - e^x)/2$, basta aplicar la fórmula de la derivada de un cociente; $(Chx)' = Shx$ y $(Shx)' = Chx$.

• *Derivada de las funciones trigonométricas.* Las derivadas de las funciones seno y coseno en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ se obtienen directamente de usar las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}; \quad \cos x - \cos a = \operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}.$$

La derivada de la función tangente se obtiene aplicando la fórmula para la derivada de un cociente.

• *Derivada de las funciones trigonométricas inversas.* Basta aplicar el teorema de diferenciabilidad de la función inversa para probar que $(arcsenx)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $(-1,1)$, en los puntos -1 y 1 tiene derivada infinita $(+\infty)$. Análogamente, $(arccosx)' = 1/-\sqrt{1-x^2}$ en $(-1,1)$, en los puntos -1 y 1 tiene derivada infinita $(-\infty)$. Finalmente, $(arctgx)' = 1/(1+x^2)$.

4. Derivadas de funciones implícitas y parametrizadas

4.1. Método de derivación de funciones implícitas. Las funciones con las que hemos trabajado hasta ahora han venido definidas en forma explícita $y = f(x)$. Con frecuencia nos encotraremos que f viene definida mediante una ecuación $F(x, f) = 0$. Por ejemplo $xf(x) = 1$. A veces podemos resolver dicha ecuación con respecto a f y obtenemos $f(x)$; en el caso anterior, $f(x) = 1/x$. Otras veces no, y decimos que la ecuación $F(x, f) = 0$ determina f como una función implícita de x. Es importante señalar que los términos "función implícita" y "función explícita" no caracterizan la naturaleza de la función f sino la forma en la que ésta viene expresada. Sin embargo, observemos que puede haber más de una función que responda a la ecuación implícita; así por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ determina al menos dos funciones explícitas de x;

$$y(x) = \sqrt{1-x^2} \quad e \quad y(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

En general es difícil, y a veces nos resulta imposible, encontrar una representación explícita de una función implícitamente definida. Sin embargo, aunque resulta sorprendente, con frecuencia es posible calcular la derivada de una función implícitamente definida sin resolver previamente la ecuación dada.

El método de derivación de funciones implícitamente definidas consiste en considerar $F(x, y)$ como una función de x y derivar aplicando la regla de la cadena los dos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$, para concluir despejando y'.

Por ejemplo, aplicando este método de derivación a la ecuación $xy = 1$ obtenemos $xy' + y = 0$, de donde $y' = -\frac{y}{x}$. De la misma manera, si consideramos la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ obtendremos $2x + 2yy' = 0$, de donde $y' = -x/y$ (puede comprobarse que los resultados coinciden con los que se obtienen al derivar y directamente como función de x).

Sin embargo, como hemos podido observar en estos dos ejemplos, la derivación de una función implícita nos da y' en términos de x e y, con lo que al final, seguimos necesitando conocer la función y explíctamente para obtener la expresión explícita de y' en términos de x (...o resolver una ecuación diferencial). Con todo, en algunas aplicaciones prácticas, este hecho no será un inconveniente real.

Es un ejercicio oportuno comprobar que el método de la derivada logarítmica es un caso especial del método de derivación de funciones implícitas.

4.2. Derivada de una función dada paramétricamente. Sean

$$\begin{cases} x = & \varphi(t), \\ y = & \psi(t), \end{cases}$$

con t perteneciente a un intervalo real I, las ecuaciones paramétricas de una curva.

La representación paramétrica de curvas se usa ampliamente en mecánica para describir el desplazamiento de una partícula en el plano si se conocen las leyes del movimiento de sus coordenadas en función del tiempo.

Podemos dar algunos ejemplos de ecuaciones paramétricas de curvas, como la circunferencia, la elipse ... y observar que en muchos casos será más sencillo analizar las funciones dadas paramétricamente que en las formas explícita o implícita.

Supongamos que la representación paramétrica de una función es

$$\begin{cases} x = & \varphi(t), \\ y = & \psi(t), \end{cases}$$

con t perteneciente a un intervalo I, de modo que φ y ψ son derivables en I y que φ tiene inversa Φ en I también derivable. Entonces, dado que $t = \Phi(x)$, la función se representa de la forma $y = \psi(\Phi(x))$. Aplicando la regla de la cadena para derivar con respecto a x en la expresión anterior obtenemos

$$y'(x) = \psi'(\Phi(x))\Phi'(x).$$

Aplicando el teorema de derivación de la función inversa a Φ tenemos

$$\Phi'(x) = 1/\varphi'(\Phi(x))$$

de donde

$$y'(x) = \frac{\psi'(\Phi(x))}{\varphi'(\Phi(x))}$$

En la discusión del tema aplicamos el método de derivación de funciones parametrizadas a diferentes ejemplos de curvas y vemos algunas aplicaciones geométricas.

5. Derivadas de orden superior

Sea f una función real definida en un entorno I de un punto a. Se dice que f es dos veces diferenciable en a si f es diferenciable en algún entorno $U \subset I$ de a y la función derivada $f' : U \to \mathbb{R}$ es derivable en a. Análogamente, se dice que f es n-derivable en a para $n > 1$, si es $n - 1$-veces derivable en algún entorno de a y su derivada $(n - 1)$-ésima es derivable en a.

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número natural $n > 1$, se denomina derivada de orden n-ésimo de la función f en un punto a, escribimos $f^{(n)}(a)$, a la derivada $(f^{n-1})'(a)$, si existe, de la función $f^{(n-1)}$ en el punto a; . A veces será mejor por cuestión de índices, denotar con $f^1(a)$

la derivada $f'(a)$ de f en el punto x_0. Del mismo modo que si f es derivable en un intervalo I tenemos definida la función derivada f' en dicho intervalo; para cada $n > 1$, si $f^{(n-1)}$ es derivable en I, tenemos definida la función f^n o "derivada n-ésima de f" en I.

Vemos algunos ejemplos de funciones elementales que admiten derivadas de cualquier orden y de otras que sólo admiten una cantidad finita. La fórmula de derivación de las funciones exponenciales se generaliza para cualquier orden de derivada así como la fórmula de Leibniz.

6. Prácticas

1. Hallar la derivada de $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ a través de la definición de derivada (usar el binomio de Newton).
2. Calcular la derivada de $\ln |x|$.
3. Puede ser intersante que el alumno ofrezca su interpretación "física"de la segunda derivada.
4. Siguiendo con argumentos intuitivos, una vez visto que una función con un punto anguloso, como $|x|$ en el 0 no tiene derivada ahí, aunque es continua, podemos jugar a repetir el argumento; la idea es obtener funciones continuas diferenciables cada vez en menos puntos. Un ordenador puede ayudar a visualizar lo que sigue
   - En el primer paso, elegimos una función con un punto anguloso, como $|x|$; y trazamos una banda de achura δ_1 en torno a ella.
   - En el segundo paso imaginamos la trayectoria de una bala rebotando dentro de la banda anterior; siguiendo esa trayectoria imaginamos una banda de anchura δ_1, siempre contenida en la banda anterior.
   - Iteramos el argumento. Nos aseguramos que la sucesión de deltas converge a 0.
   - Ahora viene convencerse que la intersección de todas las bandas anteriores es la gráfica de una función continua...
   - ... que no es diferenciable en ningún punto!
5. Visualizamos la gráfica de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n \cos(3^n x)$ que es continua en todo punto y derivable en ninguno.
6. Estudiar dónde y cuántas veces es diferenciable la función
$$|x|^3 = \begin{cases} -x^3, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0. \end{cases}$$
7. Demostrar la fórmula de Leibniz para la derivada n-ésima de un producto de funciones derivables (usar inducción; o el binomio de Newton).

CAPíTULO 8

Los teoremas del valor medio

Comportamiento local de las funciones derivables: Extremos relativos y derivada nula. Monotonía en un punto y signo de la derivada. Ejemplos.
Teoremas del valor medio: Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos. Teorema de Cauchy. Interpretaciones geométricas y cinemáticas. Ejemplos.
Consecuencias de los teoremas del valor medio: Continuidad uniforme de las funciones con derivada acotada. Caracterización de funciones constantes. Separación y aproximación de raíces. Signo de la derivada y monotonía.
Aplicaciones de los teoremas del valor medio: Método de iteración, método de Newton y cálculo aproximado de los valores de una función. Teorema del valor intermedio para derivadas. Regla de L'Hôpital.

Objetivos específicos

- Conocer los teoremas de valor medio, que relacionan el comportamiento global de una función con sus propiedades de diferenciabilidad.
- Poder utilizarlos en la práctica para aproximar soluciones de ecuaciones, raíces de funciones, etc

1. Comportamiento local de las funciones derivables

Comenzamos con la definición de extremos relativos: se dirá que una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene en un punto $c \in D$ un máximo (resp. mínimo) relativo si existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$). Diremos que el extremo es estricto si las desigualdades son estrictas. A continuación probamos que para que una función derivable tenga un extremo relativo en un punto es necesario que la derivada en ese punto sea nula (la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal).

Proposición 1.1. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto c interior de D. Si f tiene un extremo relativo en c entonces $f'(c) = 0$.*

Observemos que si c no es un punto interior del conjunto D entonces el resultado es falso, basta ver por ejemplo que 0 y 1 son extremos relativos de la función identidad $id : [0, 1] \to \mathbb{R}$ y sin embargo la derivada en ambos puntos vale 1. Observamos también que para que una función tenga un extremo relativo no es necesario que sea derivable en ese punto, por ejemplo, $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en 0.

De ahora en adelante diremos que un punto c donde la función f es derivable y $f'(c) = 0$ es un *punto crítico* de f. Ser punto crítico no implica ser extremo relativo; la función $f(x) = x^3$ tiene $f'(0) = 0$ y 0 no es un extremo relativo.

Los siguientes resultados permiten estudiar localmente la monotonía de una función derivable en términos del signo de la derivada. Recordemos que c se dice que es un punto de crecimiento (resp. decrecimiento) de f si existe un entorno de c donde la función es creciente (resp. decreciente). Lo mismo si se trata de monotonía estricta.

PROPOSICIÓN 1.2. *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto c interior de D tal que $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$) entonces f es estrictamente creciente en c (resp. estrictamente decreciente).*

El recíproco no es cierto : la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en 0 pero $f'(0) = 0$. Sin embargo, cuando no exigimos que la monotonía sea estricta, se tiene:

PROPOSICIÓN 1.3. *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y creciente (resp. decreciente) en un punto c interior de D, entonces $f'(c) \geq 0$ (resp. $f'(c) \leq 0$).*

Por supuesto, tampoco es cierto el recíproco de esta proposición como puede observarse con cualquier función derivable con un extremo estricto. Un ejemplo un poco más vistoso es la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^4 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

que no es monótona en ningún punto salvo en 1 y -1, y en el único punto donde es derivable, 0, la derivada es nula.

2. Teoremas del valor medio

El concepto de función derivable es puramente local, es decir, intervienen sólamente los valores que toma la función en un entorno del punto. Hasta ahora se ha visto siempre el comportamiento de la función en un entorno de un punto donde es derivable. Ahora nos ocuparemos de estudiar propiedades de carácter global de las funciones derivables.

TEOREMA 2.1 (Teorema de Rolle). *Sea f una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real. Si f es diferenciable en todo punto del intervalo (a, b) tal que $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

La discusión del teorema contempla si se puede admitir en las hipótesis puntos en los que la derivada es $\pm\infty$; que la hipótesis sobre la derivabilidad de la función no puede eliminarse –por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$ satisface las demás hipótesis del teorema de Rolle y sin embargo su derivada no se anula en ningún punto; y la necesidad de las demás hipótesis de continuidad y de igualdad de los valores de la función en los extremos del intervalo.

La interpretación geométrica del teorema de Rolle es clara: si una función continua en un intervalo cerrado, tomando el mismo valor en los extremos del intervalo y con tangente en todos los puntos de la gráfica salvo quizás en los extremos, tiene en algún punto tangente horizontal. Una versión más general sería:

TEOREMA 2.2 (Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos). *Sea f una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real. Si f es diferenciable en todo punto del intervalo (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Conviene que el alumno sepa manejar la fórmula anterior (llamada a veces "de los incrementos finitos") en la versión: hay un $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h).$$

Geométricamente, el teorema de Lagrange asegura que en algún punto del intervalo $[a, b]$ la tangente a la gráfica es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

TEOREMA 2.3 (Teorema de Cauchy). *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y ambas diferenciables en (a, b). Existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

2.1. Interpretación cinemática de los teoremas del valor medio. Supongamos que f y g son dos funciones que determinan el espacio recorrido por dos partículas en función del tiempo. El teorema de Rolle asegura que una partícula que acaba su recorrido donde lo empezó en algún instante tuvo velocidad cero.

Escribiendo el teorema de Cauchy en la forma
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$
obtenemos que la razón de los espacios recorridos por las partículas en el intervalo de tiempo $[a,b]$ es igual a la razón de las velocidades en algún instante.

Si el teorema de Lagrange lo escribimos de la forma
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$
la interpretación cinemática es clara: la fórmula anterior significa que en algún instante c del recorrido la velocidad instantánea coincide con la velocidad media de la partícula. Así, si un coche ha recorrido 200 kilómetros en dos horas en algún instante ha marchado exactamente a $100 km/h$.

3. Consecuencias de los teoremas del valor medio

3.1. Continuidad uniforme de las funciones con derivada acotada. En términos cinemáticos el siguiente teorema asegura que si un móvil g avanza siempre, y lo hace más rápidamente que uno f, g recorre más que f .

TEOREMA 3.1. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y ambas diferenciables en (a,b) tales que $|f'(x)|\le g'(x)$, para todo $x\in(a,b)$. Entonces $|f(b)-f(a)|\le g(b)-g(a)$.*

Se sigue inmediatamente de este teorema que toda función continua en un intervalo cerrado, diferenciable en el interior y con derivada acotada es uniformente continua. En particular se tiene:

TEOREMA 3.2. *Sea f una función real y continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ de la recta real. Si f es diferenciable en todo punto del intervalo (a,b) tal que existe $M>0$ de modo que $|f'(x)|\le M$ para todo $x\in(a,b)$, entonces $|f(b)-f(a)|\le M(b-a)$.*

3.2. Una observación interesante sobre las funciones constantes. Que la derivada de una función constante es 0 es ya bien sabido. El recíproco es lo que discutimos ahora.

PROPOSICIÓN 3.1. *Una función diferenciable definida sobre un intervalo I (en sentido amplio) es constante si y sólo si su derivada en todos los puntos es cero.*

Y como consecuencia:

COROLARIO 3.1. *Sean f y g dos funciones reales continuas en un intervalo I y diferenciables en el interior de I. Si $f'(x)=g'(x)$ para todo $x\in I$ entonce existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=g(x)+c$ en todo $x\in I$.*

3.3. Intervalos de crecimiento. Gracias al teorema de Lagrange podemos determinar los intervalos de monotonía de una función diferenciable en términos del signo de la derivada en dichos intervalos. Concretamente:

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea f es una función derivable en un intervalo I. La función f es creciente (resp. decreciente) en I si y sólo si $f'(x)\ge 0$ (resp. $f'(x)\le 0$) para todo $x\in I$.*

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea f es una función derivable en un intervalo I. Si $f'(x)>0$ (resp. $f'(x)<0$) para todo $x\in I$ entonces f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en I.*

Tampoco el recíproco de esta proposición es cierto.

3.4. Teorema del valor intermedio para derivadas. A continuación probaremos algo que quizás resulte sorprendente: si bien la función derivada de una función diferenciable puede no ser continua, sin embargo sí disfruta de una propiedad de las funciones continuas.

TEOREMA 3.3. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Si $a, b \in I$, $a < b$, y $f'(a) < \alpha < f'(b)$ (o $f'(b) < \alpha < f'(a)$) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \alpha$.*

Su prueba se sigue del teorema de Weierstrass. Como corolario immediato se tiene:

COROLARIO 3.2. *Si f' es la derivada de una función f en un intervalo I entonces f' no tiene discontinuidades de primera especie (evitables o de salto).*

4. Algunas aplicaciones

4.1. Separación y aproximación de raíces de funciones derivables. Una aplicación intersante del teorema de Lagrange es la localización de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ cuando f es una función derivable.

TEOREMA 4.1. *Si f es una función derivable en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) = 0 = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Aunque este resultado tiene un interés evidente a la hora de dibujar la gráfica de una función (nos da información sobre los puntos de la gráfica con tangente horizontal), a la hora de localizar raíces lo que será verdaderamente interesante es la siguiente relectura del teorema:

TEOREMA 4.2. *Sea f una función derivable en un intervalo $[a, b]$. Si a y b son dos raíces consecutivas de $f'(x) = 0$, entre ellas existe a lo sumo una raíz de $f(x) = 0$. De hecho, sólo existe tal raíz cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo.*

Si se conoce el signo de todos los extremos relativos de la función f en un intervalo conoceremos exactamente el número de raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en dicho intervalo. Vemos algún ejemplo.

4.2. Cálculo de límites: Regla de L'Hôpital. La denominada regla de L'Hôpital nos da una técnica para resolver algunas indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Damos un enunciado operativo, no el más general posible. En la discusión posterior se considerará el papel de cada hipótesis.

TEOREMA 4.3. *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo I (en sentido amplio) y sea $a \in I$ un número real (o bien $\pm\infty$). Supongamos que $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ y que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x).$$

Si existe el límite (sea finito o no) $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ entonces existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ y coincide con el anterior.

La demostración es consecuencia del teorema de Cauchy.

5. Prácticas

Una parte de las prácticas de esta lección obviamente se centrarán en el cálculo aproximado de los ceros de funciones (otra parte en el uso de la regla de L'Hôpital). Una vez que se sabe que una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se encuentra en un cierto intervalo interesa construir una sucesión de puntos de dicho intervalo que converja a la raíz, de modo que podamos aproximarla.

1. Método de las aproximaciones sucesivas o de iteración: *Sea f una función derivable de un intervalo cerrado I. Supongamos que la derivada de f está acotada por un valor $c < 1$. Entonces, para cualquier punto de partida $x_1 \in I$ la sucesión de puntos (x_n) de puntos de I definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge a la única solución de la ecuación $f(x) = x$ en el intervalo I.*

   (La prueba se obtiene aplicando el teorema de Lagrange).

2. En cuanto a la velocidad de convergencia, es fácil obtener la estimación $|x_n - x_0| \leq c^{n-1}|x_1 - x_0|$, con lo que la convergencia será más rápida eligiendo un punto de partida x_1 lo más próximo posible a la raíz (ojalá supiéramos cuál!) y como c el menor valor posible que acota a la derivada.
3. El método de Newton. La idea es la siguiente: Suponemos que f es una función que admite derivadas primera y segunda continuas en un intervalo cerrado I y tal que $f'(x) \neq 0$ en I. Es fácil comprobar que la tangente a la gráfica de f en un punto $(x_0, f(x_0))$ corta al eje horizontal en $(x_1, 0)$. Partiendo así de un punto $x_0 \in I$ cualquiera construimos la sucesión
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
de puntos donde las tangentes sucesivas van cortando el eje OX. Si existe una constante $c < 1$ tal que $|f(x)f''(x)|/f'(x)^2 < c$ entonces la sucesión (x_n) converge a la única raíz en el intervalo I de la ecuación $f(x) = 0$.
4. En general, se trata de subrayar el hecho de que aun no sabiendo resolver la ecuación $f(x) = 0$ –porque la razón que sea– uno es capaz, con la potencia de cálculo adecuada más los conocimientos explicados en la lección, de aproximar las soluciones tanto como se requiera. El ejemplo más sencillo: una vez que ya se vio como ejercicio que un polinomio de grado impar tiene que tener raíces, se trata de encontrarlas (para grado uno y dos ya disponen de fórmulas elementales).

CAPíTULO 9

Polinomio y serie de Taylor

El polinomio de Taylor: Noción de aproximación local de una función por polinomios: contacto de orden n con un polinomio. Definición del polinomio de Taylor. Teorema de Taylor - Young. Desarrollos de Taylor de funciones. Ejemplos. Interpretación geométrica del teorema de Taylor-Young. Operaciones con funciones y desarrollos de Taylor. Aplicaciones: cálculo de derivadas, cálculo de límites, equivalencia de infinitésimos y jerarquía de infinitos.

Teorema global de Taylor: Formulaciones equivalentes del teorema global de Taylor. Polinomio de Taylor con resto. Fórmula del resto de Lagrange. Acotación del error: planteamientos del problema. Ejemplos. Ejemplos de aproximación uniforme en intervalos.

Serie de Taylor de una función: Definición de serie de Taylor de una función. Planteamiento del problema: ¿Cuándo la serie de Taylor describe la función que la origina?. Ejemplo de Cauchy. Determinación del dominio de convergencia de la serie de Taylor de una función. Determinación del dominio donde la función coincide con su desarrollo en serie de potencias. Ejemplos. Desarrollo de Taylor de una función. Derivabilidad de los desarrollos convergentes. Análisis de los desarrollos de Taylor - Maclaurin de algunas funciones elementales.

Objetivos específicos

- Conocer el de Taylor, y su significado: que toda función suficientemente diferenciable se aproxima localmente mediante un determinado polinomio ligado a los valores de las derivadas de la función.
- Conocer la fórmula de Lagrange del resto y saber usarlo para el cálculo aproximado de valores de la función.
- Conocer algunas aplicaciones de los polinomios de Taylor al cálculo.
- Distinguir claramente entre: polinomio de Taylor, **desarrollo limitado de Taylor** y desarrollo en serie de Taylor de una función. Fundamentalemente; que aun siendo la función infinitamente diferenciable, siempre hay desarrollo limitado, pero no necesariamente en serie.

1. El polinomio de Taylor

Es sencillo comprobar que un polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado n queda determinado por sus n-primeras derivadas en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$; basta dividir reiteradamente $P(x)$ por $(x-a)$ y obtener de ese modo la representación $P(x) C_n (x-a)^n + \cdots + C_1(x-a) + C_0$. Ahora es evidente que la derivada de orden k en a es $P^{k)}(a) = k! C_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Lo que acabamos de ver para polinomios no es cierto para cualquier función real f n-veces derivable. Sin embargo, dado $a \in \mathbb{R}$ podemos construir una función polinómica $T_n(x)$ tal que

$$(1) \qquad T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) f'(a),\ \ldots,\ T_n^{n)}(a) = f^{n)}(a)$$

y de modo que T_n es una aproximación a f en un entorno de a en el siguiente sentido:

$$(2) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Por verificarse la anterior igualdad decimos que f tiene en a un contacto de orden n con T_n. Es fácil comprobar que el polinomio con el que f tiene contacto de orden n es único.

Según los comentarios que hemos hecho al empezar esta sección es claro que el único polinomio de grado n que verifica (1) es

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dicho polinomio se denomina *polinomio de Taylor de grado n de f en a* y la diferencia $R_n = f - T_n$ se denomina *resto de Taylor*.

TEOREMA 1.1 (Teorema de Taylor-Young). *Sea f una función definida en un entorno I de a. Si f es n-veces derivable en a entonces f tiene un contacto de orden n con el polinomio de Taylor de grado n de f en a.*

Se prueba por inducción que, efectivamente, $f(x)$ tiene un contacto de orden n en a con $T_n(x)$; dicho de otro modo, $R_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior al n-ésimo en a (lo que escribimos abreviadamente en la forma $o(x-a)^n$.

1.1. Desarrollo limitado de Taylor de una función. El teorema anterior se interpreta más fácilmente como un resultado de aproximación local de la función f si consideramos la función

$$\phi(x) \begin{cases} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} & x \neq a \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

Tendremos entonces que f puede escribirse de la forma

$$f(x) = T_n(x) + \phi(x)(x-a)^n,$$

siendo ϕ una función continua en a. O también,

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n), \quad \text{cuando } x \to a.$$

Cualquiera de las expresiones anteriores se denomina *desarrollo limitado de Taylor de orden n* de la función f alrededor de a. Cuando no de lugar a confusión omitiremos el adjetivo “limitado” (en realidad sólo se trata de distinguir esta representación de la representación de la función como serie de Taylor). Hallamos los desarrollos de Taylor de algunas funciones (a^x, $a > 0$; $\log(1+x)$, $x > -1$; $(1+x)^r$, $r \in \mathbb{R}$ y $x > -1$).

El recíproco del teorema de Taylor-Young no es cierto en general: la función

$$f(x) \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

tiene un contacto en 0 de orden dos con una función polinómica de grado menor o igual que 2, la función 0; sin embargo, no es dos veces derivable en 0.

La última parte de esta sección la dedicamos a obtener los desarrollos de Taylor de la suma, producto y composición de funciones usando los desarrollos de dichas funciones.

1.2. Interpretación geométrica del teorema de Taylor-Young. Geométricamente, la aproximación de una función f n-veces derivable en un punto a por el polinomio de Taylor de f en a de grado n se interpreta del siguiente modo: para $n = 0$ tenemos que $T_0(x) = f(a)$ es la recta horizontal que pasa por $(a, f(a))$. El polinomio de Taylor de grado uno $T_1(x)$ es la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. El de grado dos $T_2(x)$ es la parábola de eje vertical que tiene contacto de orden dos en a con $f(x)$, y así sucesivamente. Es claro ahora el significado geométrico de aproximar una función localmente mediante polinomios. La ventaja de tener esta aproximación es evidente ya que las funciones polinómicas son mucho más fáciles de manejar. Daremos cuenta de ello en las aplicaciones que veremos a lo largo de este capítulo y en el dedicado al estudio de funciones según la derivada.

1.3. Aplicaciones. A continuación vamos a ver algunas aplicaciones de los desarrollos limitados de Taylor al cálculo.

• *Cálculo de derivadas.* En algunas ocasiones podremos calcular derivadas n-ésimas en un punto usando la unicidad del desarrollo polinómico de Taylor-Young. Por ejemplo, teniendo en cuenta la siguiente igualdad

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^6 + \frac{x^7}{1-x},$$

puesto que $x^7/(1-x) = o(x^6)$, el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x) = 1/(1-x)$ en 0 es $T_6(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^6$ y por tanto $f(0) = f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f^{3)}(0)3!$, ..., $f^{6)}(0) = 6!$

Una observación que puede resultar útil es que, gracias a la regla de L'Hôpital, podemos conocer el polinomio de Taylor de una función en un punto si conocemos el desarrollo polinómico de la derivada.

•*Cálculo de límites.* Calcular el límite de una función en un punto a resultará, en general, un problema mucho más sencillo si sustituimos la función por su desarrollo limitado de Taylor en a, siempre que lo admita, claro. El teorema de Taylor-Young nos permitirá entonces resolver con comodidad, en la mayoría de los casos, indeterminaciones del tipo 0/0 en el cálculo de límites. Conseguimos de este modo un método más sencillo que la aplicación reiterada de la regla de L'Hôpital. A veces es de utilidad tener en cuenta que$f(x) - T_{n-1}(x)$ y $(x-a)^n f^{(n)}(a)/n!$ son equivalentes en a, cuando $f^{(n)}(a) \neq 0$. En particular, se obtienen de forma sencilla las equivalencias más usuales entre infinitésimos. Nótese que si $f(x)$ es un infinitésimo en a, entonces $f(x) = (x-a)^m f^{(m)}/m! + o((x-a)^m)$.

2. Teorema Global de Taylor y Fórmula de Lagrange

Así como el teorema local de Taylor se corresponde con el concepto de función diferenciable en un punto, el teorema global se corresponde con el teorema del valor medio. Vamos a ver cuatro enunciados de este teorema global.

2.1. Cuatro enunciados equivalentes del teorema global de Taylor. Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$, m-veces diferenciables en $[a,b)$ y $m+1$-veces diferenciables en (a,b).

Teorema 2.1. *Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - T_{m,f}(b)]g^{m+1)}(c) = [g(b) - T_{m,g}(b)]f^{m+1)}(c).$$

Teorema 2.2. *Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - T_{m,f}(b) = \frac{f^{m+1)}}{m+1!}(c)(b-a)^{m+1}.$$

Teorema 2.3. *Si $|f^{m+1}(x)| \leq g^{m+1)}(x)$, para todo $x \in (a,b)$ entonces*

$$|f(b) - T_{m,f}(b)| \leq g(b) - T_{m,g}(b).$$

Teorema 2.4. *Si $|f^{m+1}(x)| \leq M_m$ para todo $x \in (a,b)$ entonces*

$$|f(b) - T_{m,f}(b)| \leq \frac{M_m}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.$$

Basta probar el Teorema 1, los demás se obtienen como corolario. Nótese que el caso particular $m = 0$ da los teoremas del valor medio.

La fórmula en el Teorema 2.2 se denomina *fórmula de Taylor con resto* y el término

$$R_m = \frac{f^{m+1)}}{m+1!}(c)(x-a)^{m+1}$$

se conoce como *fórmula del resto de Lagrange* (o también *término complementario*). Se denomina fórmula de Maclaurin a la fórmula de Taylor con resto para $a = 0$.

Daremos en este punto a los alumnon una lista con los restos de Lagrange de algunas funciones elementales. Los ejercicios incluirán comprobar algunos de ellos.

2.2. Aplicaciones.

• *Acotación del error.* Consideramos ahora la posibilidad de aproximar una función dada mediante sus polinomios de Taylor. La primera cuestión básica es: ¿Cómo estimar $R_n(x)$ para un valor particular de x? La fórmula del resto de Lagrange nos ayuda a responder esta cuestión ya que nos permite calcular el valor absoulto del error que se comete al tomar como valor de $f(x)$ la suma de los m-primeros términos del polinomio de Taylor de f.

La segunda cuestión es saber si dada una cota de error admisible ε se puede alcanzar una estimación $|R_n(x)| \leq \varepsilon$ para n grande. La respuesta la encontramos en el Teorema 2.4: teniendo en cuenta que sea cual sea x se tiene

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} = 0,$$

si f es infinitamente diferenciable en (a, x) y si las derivadas en (a, x) están uniformemente acotadas por una constante M, entonces para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $M/n!(x-a)^n < \varepsilon$ para $n > N(\varepsilon)$. A efectos de cálculos, nótese que cuanto menor es la cantidad $|x-a|$ menos sumandos necesitaremos en el polinomio de Taylor en a para aproximar el valor de $f(x)$.

• *Aproximación uniforme en intervalos.* El ejemplo anterior puede servimos para mostrar al alumno que a veces es posible encontrar aproximaciones uniformemente buenas en un intervalo dado. Así, una condición suficiente para tener *aproximación uniforme* en un intervalo $[a, b)$ es que la función sea infinitamente diferenciable en dicho intervalo y con derivadas uniformemente acotadas en él ya que en ese caso $|R_m(x)| < \varepsilon$ a partir de un cierto m y para todo $x \in [a, b)$.

3. Serie de Taylor de una función

Ya se mencionó que muchas funciones pueden representarse como *series de potencias* sin entrar en detalle en las condiciones suficientes o necesarias para que tal cosa ocurra. Estamos ahora en condiciones de estudiar cuándo una función dada admite un desarrollo en serie de potencias en un determinado punto. Comencemos observando que si una función f admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

en un cierto entorno de un punto a, esta función admite derivadas de todos los órdenes en un entorno de dicho punto, y los coeficientes de la serie quedan unívocamente determinados por las derivadas de la función del modo

$$a_n \frac{f^{n)}(a)}{n!}.$$

Así, la función f se escribiría en un entorno del punto a,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{(x-a)} + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

A esta serie se le llama *serie de Taylor de la función f en a*. Sin embargo, ser infinitamente diferenciable no es una condición suficiente para que una función admita un desarrollo en serie de potencias. Veamos el contraejemplo de Cauchy: la función

$$f(x) \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y no es difícil ver que todas sus derivadas en el origen son nulas. Así, su serie de Taylor en 0 es 0, y no converge a f en ningún entorno de 0. Lo que acabamos de ver muestra que, aunque siempre podemos costruir la serie de Taylor de una función f infinitamente diferenciable en un punto a, lo que bien puede ocurrir es que la suma de la serie no coincida con la función f que le dio origen en ningún entorno del punto a, incluso podría tener radio de convergencia 0. Ya hemos descubierto pues cuáles son las cuestiones fundamentales ante una determinada serie de Taylor:

- ◇ ¿Dónde converge?
- ◇ ¿En qué puntos la suma de la serie coincide con la función de partida?

La respuesta a la primera pregunta ya la conocemos: el radio de convergencia se determina según la fórmula de Cauchy-Hadamard. Veamos que también conocemos la respuesta a la segunda pregunta.

3.1. Desarrollo en serie de Taylor de una función. Puesto que las sumas parciales de la serie de Taylor son los correspondientes polinomios de Taylor, el desarrollo es válido precisamente cuando el resto de Taylor $R_n(x)$ tiende a 0.

TEOREMA 3.1. *Sea f una función infinitamente derivable definida en un intervalo I. La serie de Taylor de la función f en un punto $a \in I$ converge en un punto $x \in I$ al valor $f(x)$ si y sólo si $R_n x$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito.*

Si el intervalo de convergencia de la serie no coincide con el conjunto de puntos de I donde $R_n(x) \to 0$, cosa que ocurrirá generalemente, en la intersección de ambos podemos escribir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Una función real o compleja definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ se denomina *función analítica* si para todo $a \in I$ existe una serie de potencias $\sum a_n(x-a)^n$ con radio de convergencia no nulo tal que $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ en algún entorno de a.

3.2. Análisis del desarrollo en serie de Taylor-Maclaurin de algunas funciones elementales. Usando el Teorema 3.1 y la fórmula del resto de Lagrange podemos ya analizar el desarrollo de Taylor - Maclaurin (es decir, el desarrollo de Taylor en 0) de ciertas funciones elementales; sabiendo que son infinitamente diferenciables en un entorno I de 0, calculamos la serie de Taylor en 0, hallamos su radio r de convergencia y determinamos el conjunto de puntos $x \in I \cap (-r, r)$ para los que $R_n(x)$ tiende a 0. Analizamos así, por ejemplo, los desarrollos en serie de Taylor-Maclaurin de e^x; a^x para $a > 0$ (usamos $a^x = e^{x \log a}$); $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Observamos ahora que una serie de potencias convergente y su derivada tienen el mismo radio de convergencia. Además, ambas convergen uniformemente en todo subintervalo cerrado del intervalo de convergencia. En la discusión del tema enunciamos, omitiendo la demostración, el resultado sobre la derivada del límite uniforme de funciones; de dónde concluiremos que los desarrollos de Taylor convergentes se pueden derivar e integrar en el intervalo de convergencia. Con esta información encontramos otro método para obtener, derivando o integrando desarrollos conocidos, nuevos desarrollos en serie de potencias. Proponemos realizar de este modo el penúltimo ejercicio de Prácticas.

4. Prácticas recomendadas

Las prácticas en general se realizarán siguiendo el esquema:

1. Usando MATLAB visualizamos los polinomios de Taylor de algunas funciones y observamos el significado geométrico de que dichos polinomios aproximan localmente a “sus” funciones.
2. Usamos la fórmula del resto de Lagrange para cálcular aproximadamente, con distintos grados de precisión, valores de algunas funciones. Por ejemplo, calcular $\operatorname{sen}(\pi/9)$ con un error menor que 0,001.

3. Deducimos de los desarrollos limitados de Taylor algunas desigualdades como $e^x \geq 1+x$, $\log(1+x) < x$ $(x>0)$, $arctgx < x$.
4. Calculamos límites usando los desarrollos limitados de Taylor.
5. Obtenemos en primer lugar el desarrollo de $(1+x)^\alpha$, que se conoce como *serie binómica*, válido en $(-1,1)$;

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 0.$$

Para ello podemos evaluar el término complementario o resto de Lagrange, o bien optar por deducirlo hallando la serie de potencias que verifica la ecuación diferencial $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$, $f(0)=1$, cuya solución es única (en $(-1,1)$).

A partir de la serie binómica y de las series geométricas obtenemos los desarrollos de Taylor - Maclaurin más usuales:

• Para $|x|<1$ conocemos el desarrollo en serie de potencias de la función $1/(1+x^2)$ ya que es la suma de una serie geométrica de razón $-x^2$;

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando en el intervalo $[0,x]$, $|x|<1$, obtendremos el desarrollo de la función $\operatorname{arc\,tg} x$:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

válido en $|x| \leq 1$.

• De la serie geométrica de radio de convergencia 1

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

obtenemos integrando en $[0,x]$ el desarrollo de $\log(1+x)$ en $|x|<1$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

El desarrollo también es válido para $x=-1$ (aunque ahí no hay función).

• Del desarrollo de Maclaurin de la función seno[1]

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

obtenemos el de la función coseno,

$$\cos x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ambos desarrollos son válidos en todo $x \in \mathbb{R}$.

[1] También podemos usar la fórmula de Euler para deducir los desarrollos a partir del de la exponencial compleja.

• Reemplazando x por $-x^2$ en la función que da la serie binómica, tomando $\alpha = -1/2$, y después integrando obtenemos el desarrollo la función arco seno en $|x| < 1$:

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Los desarrollos de las funciones hiperbólicas se obtienen directamente de usar el desarrollo de la exponencial.

6. Damos indicaciones de cómo se aplicarán las series de Taylor al cálculo aproximado de integrales definidas. Adelantaremos, informalmente, la noción de primitiva de una función y observaremos que hay funciones que no admiten primitivas en términos elementales. Para este tipo de funciones (e^{-x^2}, $\frac{sen(x)}{x}$ o $\sqrt{1 - k^2 sen^2 x}$), los desarrollos en serie de Taylor son especialmente útiles porque nos permitirán, aun sin conocer primitivas, calcular las integrales definidas, con cualquier grado de precisión. Observamos que esto es posible gracias a la convergencia uniforme de las series de potencia en los subintervalos cerrados de su dominio de convergencia.

CAPíTULO 10

Análisis y representación gráfica de funciones

Análisis de funciones diferenciables: Monotonía y extremos relativos. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Estudio local de funciones mediante el polinomio de Taylor.

Representación gráfica de funciones: Análisis general de funciones: dominio, simetrías, periodicidad y raíces. Análisis de asíntotas. Esquema del procedimiento para representar una función.

Objetivos específicos

- Poner en práctica todos los resultados teóricos adquiridos hasta ahora en los capítulos anteriores para analizar una función. Lo que incluye saber relacionar el aspecto de una función con las propiedades de su derivada.
- Aprender a modelar y resolver algunos problemas físicos, de probabilidad, de optimización ... en una variable.

1. Introducción

Para analizar los fenómenos de la naturaleza desde un punto de vista cuantitativo es de ayuda ser capaz de establecer y estudiar la dependencia entre las variables que intervienen en dichos fenómenos. Si conseguimos expresar esa dependencia de forma analítica, es decir, mediante fórmulas, podremos usar las herramientas del análisis matemático para estudiarla. Por ejemplo, la relación entre el ángulo con el que se lanza un proyectil y el alcance de éste viene dada por la función

$$s(\alpha) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g},$$

donde g es la gravedad y v_0 la velocidad inicial de lanzamiento del proyectil. La función $s(\alpha)$ nos da el alcance del proyectil en función del ángulo α de lanzamiento. Las herramientas del cálculo diferencial nos sirven para determinar cuándo un mayor ángulo implica un mayor alcance, o para qué valor α se tiene el alcance máximo.

La teoría de extremos relativos de funciones diferenciables también nos permite resolver, en ocasiones de forma sencilla, problemas en los que se trata de optimizar una función. Por ejemplo, si queremos fabricar cajas de cartón, sin tapa, a partir de piezas cuadradas de 1m de lado, por el procedimiento de cortar cuadrados iguales en las esquinas y plegando el resto; ¿qué lado deben tener los cuadrados que se cortan para que el volumen de la caja plegada resultante sea máxima?

En este capítulo usaremos los resultados que tenemos disponibles sobre la diferenciabilidad de funciones para analizar su comportamiento. Si añadimos el estudio de la continuidad de la función y otros aspectos generales (dominio de definición, simetrías, periodicidad, comportamiento asintótico,...) de la misma, tendremos todas las herramientas para, hasta donde es posible, representar su gráfica y de este modo visualizar su comportamiento.

2. Análisis de funciones diferenciables

A lo largo de esta sección considerarermos $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un intervalo abierto I.

2.1. Monotonía y extremos relativos. Ya vimos la definición de puntos de crecimiento (decrecimiento) de una función así como la de extremo relativo (máximo y mínimo). Seguimos el siguiente procedimiento para determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos basado en el estudio de los signos de la derivada:

1. Hallar los puntos críticos de la función. Sabemos que una condición necesaria para que una función diferenciable f tenga un extremo relativo en un punto a es que $f'(a) = 0$ (es decir, la tangente es horizontal).

2. Estudiar el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos críticos. Recordamos que gracias al teorema de los valores intermedios para derivadas se tiene que si la función derivada toma valores de distinto signo en puntos $a < b$, entonces se anula en algún valor entre a y b. Luego el signo de la primera derivada no cambia en un intervalo cuyos extremos son puntos críticos.

3. Los intervalos de crecimiento serán aquellos donde la derivada tenga signo positivo. Por la observación anterior, basta tomar un punto de cada intervalo para determinar el signo de la función derivada en él.

4. Determinar los extremos relativos de f. Serán los puntos críticos que separan intervalos donde la derivada tiene distinto signo.

Si la función es dos veces diferenciable en un punto crítico a podemos deducir la existencia de un extremo relativo del signo de la segunda derivada en el punto a. Puesto que el signo de la segunda derivada en a nos indica el crecimiento o decrecimiento de la primera derivada en los alrededores de a, tendremos que si $f''(a) > 0$, la derivada crece (es decir, las pendientes de las rectas tangentes en las proximidades de $(a, f(a))$ van creciendo), lo que significa que en a la función tiene un mínimo relativo. Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo en a. Si $f''(a) = 0$ no obtendremos ninguna información al respecto. En ese caso, podemos comprobar directamente el signo de la primera derivada alrededor del punto. Algunos ejemplos que ilustran este fenómeno: $f(x) = 1 - x^4$, $g(x) = x^6$, $h(x) = (x - 1)^3$).

2.2. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Diremos que a es un punto de concavidad de f si

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \geq 0.$$

Geométricamente, un punto a es de concavidad si la gráfica de la función en un entorno de a está por encima de la tangente en $(a, f(a))$. Análogamente, decimos que a es un punto de convexidad de f si

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \leq 0.$$

Geométricamente, la gráfica de la función en los alrededores de a está por debajo de la tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$. Si todos los puntos de un intervalo abierto I son puntos de concavidad (resp. convexidad) decimos que I es un intervalo de concavidad (resp. de convexidad) de la función f. Si además f es dos veces diferenciable en I, es obvio que

$$f \text{ es cóncava en } I \Longleftrightarrow f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ es convexa en } I \Longleftrightarrow f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in I$$

Decimos que a es un punto de inflexión de f si $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ toma signos distintos a ambos lados de a. Geométricamente, la tangente a la gráfica en $(a, f(a))$ atraviesa la gráfica de la función. Así, f es cóncava a un a la izquierda de a y convexa a la derecha, o viceversa. Si f es dos veces diferenciable en un entorno de a entonces

a es un punto de inflexión de f si y sólo si f'' toma signos distintos a la izquierda y derecha de a.

2.3. Estudio local de funciones mediante el polinomio de Taylor. En ocasiones, el teorema de Taylor nos permite localizar los puntos extremos, de concavidad, de convexidad y de inflexión. Si la función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $(n+1)$-veces diferenciable en a tal que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ y

$$f''(a)f^{(3)}(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,$$

entonces se obtiene sin dificultad que en un entorno "reducido" de a el signo de $f^{(n+1)}(a)$ coincide con el de

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^{n+1}}.$$

De donde se deduce:

- Si $n+1$ es par,
  - a es un punto de concavidad "estricta" de f si $f^{(n+1)}(a) > 0$.
  - a es un punto de convexidad "estricta" de f si $f^{(n+1)}(a) < 0$.
- Si $n+1$ es impar, a es un punto de inflexión.

Si en cada uno de los casos anteriores se tiene además que $f'(a)0$ entonces el punto de concavidad (convexidad) estricta es en particular un mínimo (máximo) relativo estricto, y el punto de inflexión tendrá tangente horizontal.

El hecho de que el teorema local de Taylor nos permita describir el comportamiento local de una función suficientemente derivable se resume en la siguiente frase: el comportamiento local de una función en un punto coincide con el del polinomio de Taylor de grado más bajo para el que la cuestión tenga sentido.

3. Representación gráfica de funciones

3.1. Análisis general de funciones. Para llevar a cabo la representación gráfica de una función (no necesariamente diferenciable) debemos comenzar con el estudio de su dominio. Hacemos un breve repaso de los métodos para determinar el dominio en los casos en los que la expresión analítica de la función contenga raíces o logaritmos que puedan dar lugar a valores no reales de $f(x)$. A continuación estudiamos las simetrías notables que pueda tener la función; si la función es par ($f(x) = f(-x)$) su gráfica será simétrica con respecto al eje OY, si es impar ($f(x) = -f(-x)$), la gráfica será simétrica con respecto al origen de coordenadas. Estudiamos después si la función es periódica, es decir, si existe $k > 0$ tal que $f(x) = f(x+k)$ para todo x de su dominio. En el caso en que la función sea periódica de periodo k bastará estudiar su comportamiento en un intervalo de la forma $[a, a+k)$ y después trasladarlo a los intervalos $[a+nk, a+(n+1)k)$ y $[a-nk, a-(n-1)k)$. Hallamos después los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas, resolviendo, siquiera aproximadamente, la ecuación $f(x) = 0$.

El siguiente paso es importante: determinar los puntos de discontinuidad de la función y la naturaleza de las mismas, que deberán tenerse en cuenta en todo el análisis posterior de la función. De hecho, a efectos prácticos, serán tratados en adelante (junto a los puntos donde la función no sea diferenciable) como si fueran puntos críticos.

A continuación estudiamos la diferenciabilidad de la función. Teniendo ahora en cuenta los conjuntos de puntos críticos, puntos de discontinuidad y puntos donde la función no es diferenciable, nos disponemos a estudiar los intervalos de crecimiento, extremos relativos, puntos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión. Hemos de insistir en el hecho de que todos estos conceptos son independientes de que la función sea o no diferenciable; si lo es, tendremos obviamente más recursos para estudiar el comportamiento de la función. Pero si la función no fuese diferenciable, entonces tenemos que acudir a la definición de cada uno de los conceptos y hacer un análisis directo de la función en un entorno de cada punto. Es necesario ilustrar esta observación con ejemplos suficientes que muestren por ejemplo, que podemos tener extremos relativos en puntos donde la función no es diferenciable o son puntos de inflexión:

- $f(x) = |x|$ en $x = 0$; tiene derivadas laterales pero no coinciden
- $g(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ en $x = 0$ cuya derivada es infinita.

- $\sqrt[3]{x}$ en $x = 0$ cuya derivada es infinita.

Finalmente, tendremos los elementos suficientes para representar la función una vez que sepamos determinar las *ramas infinitas* o asíntotas de la función y la posición relativa de la gráfica con respecto a ellas.

3.2. Asíntotas. En este apartado mostramos cómo llevar a cabo el estudio asintótico de las funciones, es decir, el comportamiento de las funciones cuando x tiende a más o menos infinito, y cuando la función tiene límites infinitos en algún punto. En particular, detectamos cuándo la gráfica de una función se "aproxima indefinidamente" a una recta.

3.2.1. Asíntotas verticales. Decimos que f tiene una asíntota vertical en un punto a si alguno de los límites laterales de f en a es infinito. La recta $x = a$ se denomina asíntota vertical de la función f en a.

3.2.2. Asíntotas oblicuas. Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$$

entonces se verifica $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ y se dice que la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de f. Por existir a, decimos que $y = ax$ es una dirección asintótica de f. Si a además $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \infty$ decimos que f tiene una rama parabólica de dirección $y = ax$. El caso particular $a = 0$ significa que $y = b$ es una asíntota horizontal.

Todo lo dicho es válido también tomando límites en $-\infty$ (si es que la función no está acotada inferiormente).

Finalmente, para determinar la posición de la gráfica con respecto a una asíntota $y(x)$ estudiamos el signo de la diferencia $f(x) - y(x)$. Estudiamos las asíntotas en algunos ejemplos concretos: $f(x) = \tan x$, $g(x) = 2/(x - 5)$, $h(x) = e^{1/x}$, $(x^2 - x + 2)/x$ y $e^{-x} \operatorname{sen} x + x$.

3.3. Esquema general del análisis y representación de funciones. Para analizar y representar gráficamente una función pueden seguirse los siguientes pasos:

1. Cálculo del dominio de definición de la función.
2. Simetrías de la función.
3. Periodicidad.
4. Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
5. Puntos de discontinuidad.
6. Derivabilidad de la función y determinación de puntos críticos.
7. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
8. Extremos relativos y absolutos.
9. Dominios de concavidad y convexidad.
10. Puntos de inflexión.
11. Asíntotas.

En los puntos 7, 8, 9 y 10 podemos seguir cualquiera de los procedimientos que hemos indicado (siempre que proceda): usar la definición de los conceptos, usar la primera y segunda derivada ó usar el polinomio de Taylor. No se puede establecer en general que alguno sea claramente más económico en términos de esfuerzo que los otros. Por ejemplo, podemos tener una función suficientemente derivable pero tal que el cálculo de las derivadas sucesivas se va complicando cada vez más, en cuyo caso suele ser más efectivo usar sólamente la primera y/o segunda derivada.

4. Prácticas

1. Representar gráficamente funciones. Pueden tomárselo como un arte, pueden proponerse funciones uno a otro,... lo que importa es que practiquen.
2. El ordenador puede servir para que comprueben la validez de uss resultados.
3. Especialmente recomendados para alumnos de la Diplomatura de Estadística:

   a) Estudiar la campana de Gauss (gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$). Indicamos al alumno cómo esta función está relacionada con la distribución de probabilidad continua más relevante; la distribución normal.
   b) Estudiamos otras funciones que originan distribuciones de probabilidad continuas (funciones de densidad): distribución Γ, χ^2, $t - Student$, $F - Fisher$. Usaremos algún programa para corregir y complementar nuestro estudio así como para dar las primeras indicaciones de cómo usar estas gráficas para el cálculo de probabilidades.
4. Indicados en general.
   a) Problemas de optimización en una variable.
   b) Planteamiento y resolución de algunos problemas físicos: estudiamos las oscilaciones de una carga sobre una ballesta. Se obtiene la fórmula de la desviación y de la carga respecto a la posición de equilibrio, en función del tiempo t:
   $$ye^{-kt}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t),$$
   donde k, A, B y ω son constantes para un sistema oscilatorio dado (dependen de la elasticidad de la ballesta, de la carga aplicada, etc...).

CAPíTULO 11

Cálculo integral en una variable

Integral de Riemann: Sumas inferiores y superiores. Propiedades. La definición de función integrable y de integral. Sumas de Riemann. Definiciones equivalentes de integrabilidad (condición de Cauchy y condición de Riemann). Integrabilidad de las funciones continuas y de las funciones monótonas.

Propiedades de la Integral: Linealidad de la integral. Integrabilidad del supremo e ínfimo. Integrabilidad del producto. Comportamiento frente a desigualdades. Aditividad respecto del intervalo.

Teoremas fundamentales del Cálculo Integral: Teorema del valor medio del cálculo integral. Función área. Teorema fundamental del cálculo. Definición de primitiva. Regla de Barrow. Ejemplos.

Cálculo de primitivas: Definición de integral indefinida. Funciones primitivas no elementales. Integración por partes. Integración por cambio de variable. Ejemplos típicos. Integración de funciones racionales y racionales trigonométricas. Integración de funciones de irracionales cuadráticos. Ejemplos.

Integrales impropias: Integrales en intervalos no acotados. Definición y ejemplos. Integrabilidad absoluta. Criterio de comparación. Criterio de comparación por cociente. La integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}$. Integrales de funciones no acotadas. Definición y ejemplos. Criterios de integrabilidad. La integral $\int_0^1 x^{-\alpha}$.

Aplicaciones de la integral: Aplicaciones geométricas: cálculo del área de figuras planas. Volúmenes de figuras de revolución. Área lateral de un cuerpo de revolución. Aplicaciones al cálculo de probabilidades: las funciones B y Γ de Euler y la integral de Gauss.

Objetivos específicos

- Familiarizarse con el concepto de integral; lo que incluye conocer sus propiedades y el modo de calcularla.
- Conocer los teoremas fundamentales que conectan los conceptos de integral y primitiva. Obviamente, distinguir con claridad una de otra.
- Conocer una lista razonable de primitivas y ejercitarse en los métodos de primitivación (y sus aplicaciones a la integración).
- Ser capaces de aplicar los métodos de integración a problemas concretos: cálculos de áreas, volumenes, etc

Introducción

La mayor parte de este capítulo está dedicada a la noción de integral de una función acotada f en un intervalo real cerrado $[a, b]$. Introducimos en un primer momento la noción de integral de una forma tangible para el alumno; integrar una función $f \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$ significa medir (si es posible) el área encerrada por la gráfica de la función y el segmento determinado por el intervalo $[a, b]$, dicho valor se denotará de la forma $\int_a^b f$; o, si fuera preciso, o más claro, $\int_a^b f(x)dx$. Históricamente, el deseo y la necesidad de calcular áreas fue la motivación tras la definición de integral; y, aunque conceptualmente hay algunas dificultades, el hecho es que con frecuencia la integral es un buen instrumento para calcularlas.

La integral es una herramienta esencial en el cálculo infinitesimal y en diferentes partes del análisis. Una de las aplicaciones más importantes de la integración se encuentra, a través de su conexión con la primitivación, en la resolución de ecuaciones diferenciales. Aunque, siguiendo los descriptores de la asignatura, éstas no serán objeto de estudio en este curso de análisis, se puede mostrar un ejemplo sencillo: la ecuación diferencial $y'(x) = f(x)$ tiene solución cuando f es continua, y la solución será una función y definida a través de una integral.

En el cálculo de probabilidades también resulta indispensable el uso de las integrales: la función que describe la distribución de probabilidad de una variable aleatoria (llamada función de distribución) está definida mediante una integral (impropia)

$$P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

para alguna función positiva f. Los parámetros asociados a la distribución tales como la media, la varianza y, en general, todos los momentos, estarán también definidos a través de integrales.

1. Integral de Riemann

La definición intuitiva de integral de $f \ge 0$ en $[a, b]$ como el área encerrada por f nos permitirá justificar la definición de integral de Riemann. Comenzaremos pues mostrando cómo se puede aproximar el área encerrada por la gráfica de una función positiva en un intervalo $[a, b]$ como suma de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica. Para ello necesitamos en primer lugar saber qué se entiende por *partición de un intervalo*: Decimos que $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ es una partición de $[a, b]$. Denotamos: $\mathcal{P}([a, b])$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$; y definimos $m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Llamamos suma superior y suma inferior de Riemann (o, también, de Darboux) de una función acotada en un intervalo $[a, b]$ relativa a una partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$ a los números reales

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k \quad y \quad L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k,$$

respectivamente, donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Si M y m son el máximo y mínimo, respectivamente, de f en el intervalo $[a, b]$, es obvio que

$$M(b - a) \le L(f, P) \le U(f, P) \le M(b - a), \quad \forall P \in \mathcal{P}([a, b]).$$

Decimos que una partición $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ es más fina que otra $Q : a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$, y escribimos $Q \prec P$, si $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$. Comprobamos a continuación algunas propiedades básicas de las sumas inferiores y superiores que serán necesarias en las demostraciones de los resultados que veremos posteriormente.

(i) $P \prec Q \Longrightarrow L(f, P) \le L(f, Q) \le U(f, Q) \le U(f, P)$.

(ii) $L(f, P) \le U(f, Q)$, $\forall P, Q \in \mathcal{P}([a, b])$.

Llamamos integral superior e integral inferior de f en $[a, b]$ a los valores

$$U(f) = \text{ínf}\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \quad y \quad L(f) = \sup\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\},$$

respectivamente. De las propiedades de las sumas superiores e inferiores, se sigue inmediatamente que $L(f) \le U(f)$. Es evidente que si f es una función positiva, el área A encerrada por la gráfica de f está acotada por las integrales inferior y superior de f;

$$L(f) \le A \le U(f).$$

Resulta inmediato ahora adivinar cuál es la definición de integral de Riemann.

DEFINICIÓN 1.1 (Función integrable). *Decimos que una función f acotada en $[a, b]$ es integrable (en sentido Riemann) si $L(f) = U(f)$. Llamamos integral de f en $[a, b]$ al valor (si existe) $\int_a^b f(x)dx = U(f) = L(f)$.*

Podemos comprobar, por ejemplo, cuál es la integral de la función constante, de una función escalonada o de la función identidad en un intervalo $[a, b]$.

Por último, definimos las *sumas de Riemann*: dada una partición $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y una colección de valores $t_1, \ldots, t_n$, $t_i \in [x_i, x_{i-1}]$, llamamos suma de Riemann de f relativa a la partición P, y a la colección $\{t_i\}$, al número real

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k.$$

Las sumas de Riemann permiten mostrar tres definiciones equivalentes de "integrabilidad en sentido Riemann". Sea f una función acotada en un intervalo $[a, b]$. Son equivalentes:

$\diamondsuit$ $L(f) = U(f) = \int_a^b f(x)dx$.

$\spadesuit$ $\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b]) :$ si $P_\varepsilon \prec P \Longrightarrow |S(f, P) - A| < \varepsilon$.

$\clubsuit$ $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}([a, b]) : U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$,

En adelante, si una función f verifica cualquiera de las condiciones anteriores diremos simplemente que f es integrable en $[a, b]$. El valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ de f en $[a, b]$ es precisamente el número A que aparece en $\spadesuit$.

1.1. Integrabilidad de las funciones continuas y de las funciones monótonas. Dada una partición $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, llamamos norma de P al número real $\|P\|$ máx$\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots n\}$. Los teoremas que siguen se pueden demostrar usando $\spadesuit$, que se conoce como *condición de integrabilidad de Cauchy*; ó bien usando $\clubsuit$, que también se conoce como *condición de integrabilidad de Riemann.* La primera via es algo más complicada aunque tiene la ventaja de que la prueba de los teoremas nos da un procedimiento para identificar además algunos límites de sucesiones como integrales. Nosotros optamos en esta ocasión por hacer las demostraciones usando la condición $\clubsuit$ simplemente por ser más sencillas.

Teorema 1.1. *Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$*

Teorema 1.2. *Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.*

Como es obvio, no es verdad en cambio que toda función integrable sea continua. Sin embargo, las funciones integrables no pueden tener demasiadas discontinuidades, tal y como afirma el siguiente resultado de Lebesgue (que no demostraremos): *Los puntos de discontinuidad de una función integrable en $[a, b]$ pueden recubrirse con una cantidad numerable de intervalos cuya suma de longitudes puede hacerse tan pequeña como queramos.*

2. Propiedades de la integral

Profundizamos en el estudio de las propiedades de la integral, como la linealidad o el comportamiento frente a desigualdades. Son importantes pues propiedades como la aditividad respecto del intervalo, es lo que nos permite integrar funciones que no están en los supuestos generales de continuidad o monotonía (como las funciones definidas a trozos).

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b(\lambda f + \beta g) = \lambda \int_a^b f + \beta \int_a^b g$, $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Las funciones ínf(f, g) y sup(f, g) son integrables en $[a, b]$. En particular, $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = \sup(-f, 0)$ y $|f| = f^+ + f^-$ son integrables en $[a, b]$.
3. Si $f \leq g$ en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. En particular, si $f \geq 0$, $\int_a^b f \geq 0$.
4. $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.
5. La función f^2 es integrable en $[a, b]$.
6. El producto fg es una función integrable en $[a, b]$.

7. Sea $a < c < b$. f es integrable en $[a, b] \Longleftrightarrow$ La función f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. Además, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b g$.

La primera propiedad puede probarse usando ♠, y sólo hace falta observar que la suma y el producto por escalares de funciones acotadas en $[a, b]$ son funciones acotadas en $[a, b]$. La opción de usar ♣ requiere estar trabajando constantemente con supremos e ínfimos, lo que resulta, a mi modo de ver, más engorroso.

Cada una de las propiedades 2 y 4 puede obtenerse como consecuencia de la otra y de 3. Si probamos 2 en primer lugar, 4 es inmediata teniendo en cuenta que se verifica 3 Caso de probar primero 3 y 4, hemos de tener en cuenta que $\max(f, g) = 1/2(f + g + |f - g|)$ y $\min(f, g) = 1/2(f + g - |f - g|)$ para obtener 2. Nótese que de 1. y 2. se deduce que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si f^+ y f^- son integrables en $[a, b]$ (ya que $f = f^+ - f^-$). Sin embargo, es falso que el hecho de que $|f|$ sea integrable implique que f lo es, como muestra, por ejemplo, la función

$$f(x) \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La desigualdad 4 junto con las dos que presentamos a continuación pasan por ser las más importantes del Cálculo Integral: la Desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2},$$

y la Desigualdad de Minkowski,

$$\left(\int_a^b (f + g)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}.$$

Las propiedades 5 y 6 no son triviales; usaremos ♣ para obtener 6 como consecuencia de 5. Es importante observar que, aun siendo integrable el producto de funciones integrables, no es cierto que $\int_a^b fg$ sea necesariamente igual a $\int_a^b f \cdot \int_a^b g$. Basta ver por ejemplo que $\int_0^1 x^2 dx \neq \int_0^1 x dx \int_0^1 x dx$.

La propiedad 7 es válida para cualquier división del intervalo $[a, b]$ en subintervalos, lo que nos permite representar la integral de una función como una suma finita de integrales.

Finalmente, ampliamos ligeramente la noción de integral probando el siguiente resultado: *si dos funciones f y g son iguales en $[a, b]$ salvo en una cantidad finita de puntos entonces f es integrable si y sólo si g es integrable y $\int_a^b f = \int_a^b g$.* Como consecuencia de este resultado y de 7 se sigue que una función continua a trozos o acotada y monótona a trozos en un intervalo cerrado es integrable en dicho intervalo.

En adelante, convenimos escribir $\int_a^a f = 0$ y $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

3. Teoremas fundamentales del cálculo integral

Los teoremas que probaremos en esta sección revelan la profunda relación que hay entre el cálculo diferencial y el integral. Es habitual interpretarlos diciendo que derivar e integrar son procesos inversos; aunque no sea exactamente así, por la simple razón de que integrar es un proceso "global"mientras que derivar es un proceso "local", aceptamos la idea general. De este modo, veremos que, según la regla de Barrow, al integrar la derivada de f "se recupera" f; es decir

$$f(x) = \int_a^x f' + f(a);$$

lo que en cierto modo dice que, bajo las condiciones adecuadas, la función $\int_a^x g$ dará g al derivarse y se habrá ganado el nombre de "función primitiva de g".

El teorema que enunciamos a continuación se conoce también como "primer teorema de la media", y se sigue fácilmente del Teorema de Weierstrass y del de los valores intermedios para funciones continuas o de Darboux.

TEOREMA 3.1 (Teorema del valor medio del cálculo integral). *Sea f una función integrable en $[a,b]$ y $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$. Entonces existe $\eta \in [m,M]$ tal que*

$$\int_a^b f = \eta(b-a).$$

Además, si f es continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

El valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ se llama a veces "promedio integral" de f en $[a,b]$.
Dada una función f integrable en $[a,b]$ definimos la función "área" de f como sigue:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt;$$

Esta función está bien definida en $[a,b]$. El teorema que viene a continuación muestra que la función F se comporta mejor que la propia f: donde f es integrable, la función F será continua; y donde f sea continua, F será diferenciable. La demostración es muy sencilla usando la desigualdad 4 y el Teorema 3.1.

TEOREMA 3.2 (Teorema fundamental del cálculo infinitesimal). *La función F verifica:*

a) *F es continua (en concreto, lipschitziana) en $[a,b]$.*
b) *Si f es continua en $x_0 \in [a,b]$ entoces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Es éste el momento adecuado para introducir la definición de *primitiva*: Decimos que una función g es una primitiva de f en $[a,b]$ si g es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Por tanto, para que F sea una auténtica primitiva de f sólo falta probar que $F'(x) = f(x)$ en (a,b). De eso se encarga el Teorema fundamental 3.2. No cuesta comprobar además que para cualquier primitiva g de f en $[a,b]$ se tiene $\int_a^b f = g(b)-g(a)$. En este punto, es importante observar que si f no es continua entonces la primitiva no existe necesariamente, aun siendo f integrable; la función $f(x) = 0$, para $x \neq 1$, $f(1) = 1$, es integrable y no puede ser la derivada de ninguna función. Con este ejemplo ayudamos a desterrar un error que se comete con más frecuencia de la deseada: el de considerar la identidad $\int_a^b f = g(b) - g(a)$ como definición de integral.

TEOREMA 3.3 (Regla de Barrow). *Si f es integrable en $[a,b]$ y si g es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

La idea de la demostración es que, cualquiera que sea la partición P de $[a,b]$ elegida, $g(b) - g(a)$ es una suma de Riemann de f relativa a P. Si g es una primitiva de f, a veces escribiremos la regla de Barrow de la forma abreviada $\int_a^b f = g \,|_a^b$.

Si f es una función continua en un intervalo I entonces, recordando que $\int_b^a f = -\int_a^b f$, dado $a \in I$, la función $F(x) = \int_a^x f$ queda bien definida en todo punto de I. Así pues:

COROLARIO 3.1. *Toda función continua en un intervalo I admite una primitiva en I.*

Un ejemplo sencillo de función integrable no continua es cualquier función escalonada; por ejemplo la función "parte entera". Comprobamos que podemos calcular una primitiva de dicha función en el intervalo $[-1,2]$, incluso una primitiva de la primitiva. Este ejemplo nos mostrará además que el comportamiento de una primitiva F de f puede ser mejor que el de la propia función f, y aún mucho mejor el de una primitiva G de F.

4. Cálculo de primitivas

Sabemos que si F es una primitiva de f en (a,b) entonces también lo es $F+\lambda$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Además:

PROPOSICIÓN 4.1. *Si F y G son primitivas de una función f en $[a,b]$ entonces existe una constante λ tal que $F - G = \lambda$.*

El conjunto de primitivas de una función f se denota habitualmente del modo $\int f(x)dx = F(x) + \lambda$, que recibe el nombre de *integral indefinida* de f (siempre que no induzca a error, omitiremos en la notación la constante λ). A la integral $\int_a^b f$ de f en $[a,b]$, cuando exista, se le llama también *integral definida* de f en $[a,b]$.

Podemos calcular las primitivas de algunas funciones elementales (operaciones, composición de funciones exponencial, potencial, logarítmica, seno, arcoseno,...) como $f(x) = x^n$, $n \neq -1$. En este caso también las primitivas son funciones elementales. En general, si bien la derivada de una función elemental también lo es; no es en cambio cierto que la primitiva de una función elemental sea elemental. Por ejemplo, las funciones

$$e^{-x^2}; \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \quad \frac{\cos x}{x}; \quad s(x) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen} x}; \quad \frac{1}{\log x},$$

no tienen primitiva en términos de funciones elementales. Sin embargo, aunque no sepamos calcular una primitiva, los valores de las integrales (definidas) de dichas funciones pueden obtenerse de forma aproximada, con la precisión que deseemos, tomando el desarrollo de Taylor de las funciones dadas y después integrando los sumandos término a término, según se indicón en la Práctica 6 del capítulo dedicado a polinomios y series de Taylor.

4.1. Métodos de primitivación procedentes del cálculo diferencial.

Paso 1. Primitivas inmediatas. Comenzamos proporcionando al alumno una tabla de primitivas inmediatas de funciones elementales; es decir, que se obtienen inmediatamente sin más que recordar las fórmulas de derivación de las funciones elementales.

Paso 2. A continuación, vemos algunos métodos para calcular primitivas que se siguen directamente de resultados del cálculo diferencial:

• *Primitivación por descomposición.* Este método consiste en aplicar simplemente la linealidad de la integral

$$\int (\lambda f + \beta g) = \lambda \int f + \beta \int g, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R},$$

y nos será muy útil en el cálculo de integrales de funciones polinómicas.

• *Primitivación por partes.* Dado un par de funciones derivables f, g en un intervalo (a,b), la regla para la derivada del producto, $(fg)' = f'g + fg'$, nos da el método de primitivación por partes cuando f' y g' son además integrables en $[a,b]$; $\int f'g = fg - \int fg'$. Tomando $u = g$ y $v = f$, obtenemos la fórmula

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

• *Primitivación por cambio de variables.* Si f, g son funciones derivables en un intervalo (a,b), la regla de la cadena, $(g \circ f)' = (g' \circ f)\dot{f}'$, nos proporciona el método de primitivación por cambio de variable, siempre que f y g' sean integrables en $[a,b]$;

$$\int (g' \circ f)\dot{f}' = g \circ f.$$

Paso 3. Primitivación de algunas familias notables de funciones Proporcionamos algunas técnicas básicas para el cálculo de primitivas de ciertas familias concretas. El procedimiento general será obtener expresión racional mediante el cambio de variable adecuado.

• *Primitivación de funciones racionales.* Para calcular la primitiva de una función $P(x)/Q(x)$ usaremos el método de Hermite para evitar tener que calcular las raíces del denominador y, de paso, la posible aparición de los números complejos en el cálculo.

• *Funciones racionales trigonométricas.* Denotemos por $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ un cociente de polinomios en $senx$ y $cosx$. Hay cuatro posibles cambios de variable que reducen el cálculo de una primitiva de $R(senx, cosx)$ al cálculo de una primitiva de una función racional.

- Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ (R es impar en $\operatorname{sen} x$) haremos el cambio $t = \cos x$.
- Si R es impar en $cosx$, haremos el cambio $t \operatorname{sen} x$.
- Si R es par en $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, haremos el cambio $t = \operatorname{tg} x$.
- En cualquier caso, es válido el cambio $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$.

• *Primitivacón de funciones de irracionales cuadráticos.* Si nuestra función es del tipo $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, donde R es una función racional, hay tres tipos de cambio de variable que racionalizan la expresión irracional:

- Si $a > 0$, hacemos $\sqrt{a}x \pm t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.
- Si $c > 0$, hacemos $xt \pm \sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c}$.
- Si $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hacemos $(x - \alpha)t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

4.2. Aplicaciones a la integración.

• *Integración por descomposición* La primitivación usando la linealidad de la integral es directa:

$$\int_a^b (\lambda f + \beta g) = \lambda \int_a^b f + \beta \int_a^b g, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

• *Integración por partes.* La integración por partes requiere un poco de cuidado: de $\int f'g = fg - \int fg'$ obtenemos

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = fg|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

• *Integración por cambio de variables.* Para el cálculo efectivo de integrales definidas tenemos el siguiente enunciado: *Sea g una función continua en un intervalo abierto I y f una función derivable en un intervalo abierto J con derivada continua tal que $f(J) \subset I$.* Entonces,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = \int_a^b g(f(t))f'(t)dt.$$

5. Integrales impropias

Planteamos el problema de integración de una función en un intervalo no acotado o de integración de una función no acotada en un intervalo acotado. Estos dos problemas nos llevarán a considerar las integrales impropias.

5.1. Integrales en intervalos no acotados. Se dice que una función real f definida en $[a, +\infty)$ es integrable impropiamente en $[a, +\infty]$ si verifica que

- $\forall b > a$, f es integrable en $[a, b]$
- $\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f$, que denotaremos $\int_a^{+\infty} f$.

Diremos en este caso que la integral $\int_a^{+\infty} f$ es convergente. Si el límite anterior fuese ∞ entonces decimos que la integral es divergente y si el límite no existe decimos que f no tiene integral en $(a, +\infty)$. Las integrales en intervalos no acotados de la forma $(-\infty, a]$ se definen de forma análoga. Finalmente, diremos que la integral de f en $(-\infty, +\infty)$ converge si f es integrable en cualquier intervalo cerrado y si son convergentes al mismo tiempo $\int_{-\infty}^a f$ y $\int_a^{+\infty} f$ para algún a (y por tanto para todo a). En ese caso decimos que la integral de f en $(-\infty,+\infty)$ es convergente y le atribuieremos como valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_{a}^{+\infty} f.$$

Tras ver algunos ejemplos ($\int_1^{+\infty} 1/x$ diverge, $\int_1^{+\infty} 1/x^2 = 1$), observamos que la integral en intervalos no acotados conserva las propiedades de linealidad y el comportamiento frente a desigualdades que tenían las integrales definidas en intervalos acotados. La regla de Barrow, el método de integración por partes y por cambio de variable se generalizan también sin mayores dificultades a este caso mediante el proceso de paso al límite.

• *Criterios de convergencia.* Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ es convergente decimos que la integral de la función f es *absolutamente convergente* en $[a,+\infty)$. Tras ver el criterio general de convergencia, observamos que la convergencia absoluta implica la convergencia ordinaria. Se obtienen el criterio de acotación y el de comparación por cociente.

Teorema 5.1. *Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[a,+\infty)$ y tal que $0 \leq f \leq g$ en todo el intervalo. Si $\int g$ es convergente entonces $\int f$ es convergente y si $\int f$ es divergente entonces $\int g$ es divergente.*

Teorema 5.2. *Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[a,+\infty)$ y tal que existe $C > a$ de modo que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \geq C$. Si existen $0 < n \leq M$ tales que $n \leq f(x)/g(x) \leq M$ para todo $x \geq C$ entonces $\int g$ y $\int f$ son de la misma naturaleza (en particular, esto ocurrirá cuando exista $\lim_{x\to+\infty} f/g$ y sea distinto de 0).*

Estudiando lo que ocurre con las integrales $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtendremos los criterios de convergencia más útiles en la práctica: Sea f una función no negativa continua a trozos en $[a,+\infty)$,

- ∘ Si existe $\alpha > 1$ y $k > 0$ tal que $f(x)x^{\alpha} \leq k$, $\forall x \geq C$, para algún $C > a$, entonces $\int_a^{+\infty} f$ es convergente. En particular, si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)x^{\alpha}] \in \mathbb{R}$, la integral $\int_a^{+\infty} f$ es convergente.
- ∘ Si existe $\alpha \leq 1$ y $k > 0$ tal que $f(x)x^{\alpha} \geq k$, $\forall x \geq C$, para algún $C > a$, entonces $\int_a^{+\infty} f$ es divergente. En particular, si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)x^{\alpha}] = +\infty$, la integral $\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Vemos algunos ejemplos concretos en los que aplicamos los criterios anteriores.

5.2. Integrales de funciones no acotadas. Se dice que una función real f definida en un intervalo acotado $(a,b]$ es integrable (impropiamente) en $(a,b]$ si verifica que

- $\forall \varepsilon > 0$, f es integrable en $[a+\varepsilon, b]$
- $\exists \lim_{x\to a+} \int_x^b f$, valor que denotaremos $\int_a^b f$.

Diremos en este caso que la integral $\int_a^b f$ es convergente. Si el límite anterior fuese ∞ entonces decimos que la integral es divergente y si el límite no existe decimos que f no tiene integral en $(a,b]$. Las integrales en intervalos acotados de la forma $[a,b)$ se definen de forma análoga. Finalmente, diremos que la integral de f en un intervalo (a,b) converge cuando converjan simultáneamente las integrales de f tomadas en los intervalos $(a,c]$ y $[c,b)$ (para algún c) . En ese caso le atribuieremos como valor

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

En lo anterior incluimos el caso $b = +\infty$. Con esta nueva noción de integral tiene sentido calcular la integral de una función no acotada en un intervalo acotado, como las que presentan discontinuidades de salto infinito. Tras ver algunos ejemplos ($\int_0^1 1/x$ diverge, $\int_0^1 1/\sqrt{x} = 2,\dots$), observamos que la integral en intervalos de la forma $(a,b]$ conserva las propiedades de linealidad y el comportamiento frente a desigualdades que tenían las integrales definidas en intervalos acotados. de nuevo la regla de Barrow, el método de integración por partes y por cambio de variable se generalizan también sin dificultad a este caso.

• *Criterios de convergencia.* A continuación vemos el criterio general de convergencia y comprobamos que la convergencia absoluta de la integral de una función en $(a, b]$ implica la convergencia ordinaria en este intervalo. Es fácil ver, que el recíproco no es cierto. Los criterios de convergencia de integrales en intervalos $(a, b]$ son completamente análogos a los de integración en intervalos no acotados:

TEOREMA 5.3. *Sean f y g dos funciones continuas por secciones en $(a, b]$ y tal que $0 \leq f \leq g$ en todo el intervalo. Si $\int g$ es convergente entonces $\int f$ es convergente y si $\int f$ es divergente entonces $\int g$ es divergente.*

TEOREMA 5.4. *Sean f y g dos funciones continuas por secciones en todo subintervalo compacto de $(a, b]$ y tal que existe $c \in (a, b]$ de modo que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, c]$. Si existen $0 < n \leq M$ tales que $n \leq f(x)/g(x) \leq M$ para todo $x \in (a, c]$ entonces $\int g$ y $\int f$ son de la misma naturaleza (en particular, esto ocurrirá cuando exista $\lim_{x\to a^+} f/g$ y sea distinto de 0).*

Para obtener los criterios que realmente usaremos en la práctica estudiamos las integrales de la forma $\int_a^b (x-a)^{-\alpha} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde se obtiene: Sea f una función no negativa continua en todo subintervalo compacto de $(a, b]$,

- ○ Si existe $\alpha < 1$ y $k > 0$ tal que $f(x)(x-a)^\alpha \leq k$, $\forall x \in (a, c]$, para algún $c \in (a, b]$, entonces $\int_a^b f$ es convergente. En particular, si $\lim_{x\to a}[f(x)(x-a)^\alpha] \in \mathbb{R}$, la integral $\int_a^{+\infty} f$ es convergente.
- ○ Si existe $\alpha \geq 1$ y $k > 0$ tal que $f(x)(x-a)^\alpha \geq k$, $\forall x \in (a, c]$, para algún $c \in (a, b]$, entonces $\int_a^b f$ es divergente. En particular, si $\lim_{x\to a}[f(x)(x-a)^\alpha] = +\infty$, la integral $\int_a^b f$ diverge.

Examinamos la aplicación de los criterios anteriores en algunos ejemplos concretos.

6. Algunas aplicaciones de la integral

6.1. Aplicaciones geométricas. .

• *Cálculo de áreas de figuras planas.* Sea f una función integrable en $[a, b]$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en el menor número de subintervalos $I_1, \ldots, I_n$ tales que para cada i, la función f o bien es positivia o bien es negativa en todos los puntos de I_i. El área $A(M)$ del recinto M limitado por la gráfica de f y el segmento del eje OX determinado por el intervalo $[a, b]$ será:

$$A(M) = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{I_i} f(x)dx \right| .$$

Observamos que de no tomar valores absolutos, el valor de la integral de f en el intervalo $[a, b]$ puede no representar el área encerrada por la gráfica en dicho intervalo, por ejemplo, $\int_{-1}^1 x = 0$. y sin embargo el área del correspondiente recinto es 2.

• *Volúmenes de figuras de revolución.* Supongamos que la gráfica de una función f integrable en $[a, b]$ gira alrededor del eje OX. El cuerpo obtenido R se denomina *cuerpo de revolución.* Supongamos que queremos calcular el volumen V_R de dicho cuerpo de revolución. Hagamos una partición $P : ax_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos un valor $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. El volumen del cilindro de altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y radio $f(t_k)$ es $\pi f^2(t_k)\Delta x_k$. Puesto que f es integrable en $[a, b]$, también es integrable πf^2 en ese intervalo, luego las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^n \pi f^2(t_k)\Delta x_k$ (que son aproximaciones del volumen que queremos calcular) de la función πf^2 tienden a $\pi \int_a^b f^2(x)dx$ al afinar la partición. Por tanto, el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar f alrededor del eje OX será el valor

$$\pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Una aplicación immediata es el cálculo del volumen de una esfera.

• *Superficie de un cuerpo de revolución.* Sea R el cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica $y = f(x)$ alrededor del eje OX, cuando f es una función diferenciable y con derviada continua. Consideremos una partición $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Para cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ consideremos el tronco de cono T_k de altura Δx_k y radios de las bases $r_{k-1} = f(x_{k-1})$ y $r_k = f(x_k)$. Haciendo uso de algunos resultados básicos de trigonometría comprobamos que el área lateral A_{T_k} del tronco de cono T_k viene dada por la fórmula

$$A(T_k) = \pi |r_k + r_{k-1}| \sqrt{(r_k - r_{k-1})^2 + \Delta x_k^2}.$$

Por el teorema del valor medio del cálculo difierencial existe $t_k \in (x_k - x_{k-1})$ tal que

$$A(T_k) = \pi |f(x_k) + f(x_{k-1})| \Delta x_k \sqrt{1 + f'^2(t_k)}.$$

La suma de las áreas de los troncos de cono determinados por la partición P será

$$\pi \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) + f(x_{k-1})| \Delta x_k \sqrt{1 + f'^2(t_k)}.$$

Pero como f' es continua tendremos que la suma anterior converge al número real

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f^2(x)} dx,$$

que tomamos como definición de la superficie del cuerpo de revolución R. Como aplicación inmediata podemos obtener la superficie de una esfera.

6.2. Aplicaciones al cálculo de probabilidades. En el estudio de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas es esencial el conocimiento de las nociones básicas del cálculo integral. En concreto, el cálculo de probabilidades se efectuará a partir de la función área, a saber, si X es una variable aleatoria continua, su función de distribución F_X no será más que la primitiva $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ de una función continua $f \geq 0$ que se denomina función de densidad de X. Cada valor $F_X(x)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que x (por supuesto, f debe verificar $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$).

La distribución continua de probabilidad más importante es la distribución Normal, que depende de unos parámetros μ y σ, y viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\mu)^2}.$$

Así que será de gran ayuda para los alumnos que vayan a estudiar Estadística conocer la convergencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

que se denomina *integral de Gauss*. Para probar la convergencia de dicha integral debemos conocer previamente la convergencia de otras dos integrales notables que también dan lugar a distribuciones continuas de probabilidad: la primera es la integral de Euler de segunda especie, la función Γ de Euler:

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{r-1} dx, \quad r > 0.$$

La segunda integral relevante se conoce como integral de Euler de 1ª especie o función B de Euler;

$$B(p,q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0, q>0.$$

La convergencia de $\Gamma(r)$ y $B(p,q)$ se obtiene de la aplicación de los criterios de la Sección 5. La siguiente fórmula que relaciona las funciones Γ y B es esencial

$$B(p,q)\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q\in\mathbb{R}.$$

Se tiene en particular que $B(1/2,1/2)=\Gamma(1/2)^2$. Se calcula (haciendo el cambio $x=sen^2 t$) que $B(1/2,1/2)=\pi$. Por tanto, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Por consiguiente, la integral de Gauss queda resuelta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Lo que acabamos de hacer suele sorprender al alumno ya que hemos calculado el valor de una integral impropia sin conocer una primitiva del integrando.

Así pues, hemos probado que la función f es efectivamente una función de densidad ($f\geq 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx1$) y el valor de su función de distribución en cada punto, $F_X(x)=P[X\leq x]$, será el área limitada por la gráfica y la semirrecta determinada por el intervalo $(-\infty,x]$. Hemos de decir que en la práctica el alumno no se verá obligado a calcular las integrales de $f_{N(\mu,\sigma)}$ en $(-\infty,x]$) ya que existen tablas de los valores que toman dichas integrales en una cantidad suficientemente grande de puntos como para que se pueda estimar con mucha precisión cualquier valor de $F(x)$.

Prácticas

1. Realizar ejercicios de primitivación. Cualquier función es adecuada para intentarlo, aunque están advertidos que primitivar es también una tarea artística y por tanto el éxito no está garantizado.
2. Usando las sumas de Riemann deducimos que, eligiendo una partición de un intervalo $[a,b]$ formada por n-intervalos de igual longitud, podemos identificar algunos límites de sucesiones con integrales. Por ejemplo, podemos calcular por este procedimiento el límite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+(n-1)^p}{n^{p+1}}.$$
3. Usando el programa MATHEMATICA o MATLAB calculamos y representamos las sumas de Riemman para algunas funciones integrables cuya primitiva es capaz de calcular el programa, de modo que podamos ver cómo se aproximan los valores de las sumas, a medida que elegimos particiones más finas del intervalo, al valor de la integral.
4. Podemos también ilustrar con MATHEMATICA o MATLAB que el teorema fundamental del cálculo se verifica, pidiendo al programa que integre y derive varias funciones distintas. Está especialmente indicado para los alumnos de Estadística, compropar lo anterior con funciones de densidad y de distribución de variables aleatorias continuas.
5. Deducimos la fórmula integral para el cálculo del área en coordenadas polares.
6. Comprobamos gráficamente con diversos ejemplos que la función de distribución F de una variable aleatoria continua es una función continua, es creciente y que $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$.
7. Introducimos informalmente las nociones de esperanza matemática y de varianza de una distribución de probabilidad y las interpretamos con ayuda de algunos ejemplos. Calculamos dichos parámetros para algunas distribuciones continuas concretas, con lo que practicamos el estudio de la convergencia de integrales impropias.

CAPíTULO 12

¿Qué es un espacio métrico?

La noción de espacio métrico: La métrica usual en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, y sus propiedades. Métricas sobre un conjunto. Entornos de un punto, punto de acumulación y aislado. Límite de una sucesión.
Funciones entre espacios métricos: Límite y continuidad. Funciones elementales en $\mathbb{R}^n$.

Objetivos específicos

- Familiarizarse con la noción de espacio métrico
- Que incluye entender que las nociones de límte y continuidad para funciones definidas en o entre espacios métricos se trasladan sin dificultad a partir de las de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. La noción de espacio métrico

Revisamos algunas ideas ya explicadas: que parte esencial de la estructura de $\mathbb{R}$ es la métrica; que viene dada por el valor absoluto, en el sentido de que la distancia entre dos puntos x, y es $d(x,y) = |x-y|$. El valor absoluto se obtiene a partir de la distancia d como la distancia al 0; es decir, $|x| = d(x,0)$. Las propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall y, x \in \mathbb{R}, \quad |yx| = |y||x|$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

de ahí, que la distancia tiene las propiedades

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall y, x \in \mathbb{R}, d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall y, x, z \in \mathbb{R}, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

además de

$*$ $\forall y, x \in \mathbb{R}, r > 0,\ d(rx, ry) = rd(y,x)$
$*$ $\forall y, x, z \in \mathbb{R}, d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Por otra parte, en $\mathbb{R}^2$ hay también una noción de distancia natural, que se sigue del teorema de Pitágoras: la distancia entre dos puntos $(x,y), (a,b)$ viene dada por

$$\|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}.$$

Al igual que en el caso anterior, la distancia al $(0,0)$ se denomina módulo o, más usualmente, norma del punto; es decir,

$$\|(x,y)\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

No es difícil ver que la norma tiene en $\mathbb{R}^2$ las mismas propiedades que en $\mathbb{R}$; es decir,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, \quad \|yx\| = |y|\|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(Es un ejercicio interesante en todo caso probar que la norma cumple la desigualdad triangular: eso sí, hay que recordar bien la fórmula del binomio de Newton). La métrica asociada $d((x,y),(a,b)) = \|(x,y)-(a,b)\|$ tiene también las mismas propiedades que en $\mathbb{R}$.

Para generalizar la idea de espacio con una métrica se define la noción de *espacio métrico*. Un espacio métrico es una pareja (E,d) formada por un conjunto E sobre el que se define una aplicación $d : E \to \mathbb{R}^+$ de modo que

1. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $\forall y, x \in E, d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall y, x, z \in E, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

La discusión posterior contempla diferentes temas: nuevos ejemplos de métricas y de espacios métricos, por qué no se han incluido en la lista de propiedades las señaladas con $*$, qué tiene de especial una métrica que cumple las condiciones $*$ frente a una que no, y si una métrica lleva asociada una noción de "módulo" o norma.

El punto esencial a destacar, y que motiva la introducción de este tema, es que en un espacio métrico es posible tener una noción de función continua para la que son válidos muchos de los resultados que se mostraron para funciones continuas en $\mathbb{R}$.

1.1. Entorno de un punto. Punto de acumulación. Punto aislado. Si tenemos (E,d) un espacio métrico, los entornos básicos de un punto $p \in E$ se definen como sigue: para cada $r > 0$ el conjunto

$$B(p,r) = \{x \in E : \ d(x,p) < r\},$$

que se denomina bola centrada en p de radio r.

La noción de entorno trae consigo la de punto de acumulación y punto aislado: Dado un conjunto $A \subset E$, decimos que a es un *punto de acumulación* de A si para todo entorno de a corta a A en algún punto diferente de a. Vease que no es necesario que a pertenezca a A. Se dice que $p \in A$ es un punto aislado de A si no es de acumulación de A.

La discusión subsiguiente consiste básicamente en mostrar ejemplos que permitan al alumno visualizar la idea de punto de acumulación y aislado en diferentes métricas. Proponemos también al alumno dar la definición de límite de una sucesión en un espacio métrico. Después, visualizamos algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$.

2. Funciones entre espacios métricos

En lo que sigue $f : E \to F$ será una función definida entre dos espacios métricos (E,d) y (F,d').

2.1. Límite de una función en un punto. Dada una función $f : E \to F$ y un punto $a \in E$, se dice que l es el límite de f en a, que escribimos como $\lim_{x\to a} f(x) = l$, si cualquiera que sea el entorno $B_{d'}(l,\varepsilon)$ de l hay un entorno $B_d(a,r)$ de a de modo que la imagen de todo $p \in B_d(a,r)$, excepto tal vez la de a, se encuentran en $B_{d'}(l,\varepsilon)$.

Se muestra que f tiene límite en a si se dan las siguientes condiciones:

- a no es un punto aislado respecto al dominio de f
- para cada sucesión (x_n) del dominio de f que converge a a, se tiene que la sucesión de las imágenes $(f(x_n)$ converge a l.

En los puntos aislados del dominio de f no se aplica la noción de límite. Con diferentes ejemplos, fundamentalmente con funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, se intenta que el alumno adquiera familiaridad con la noción de límite. Eso incluye demostrar que las propiedades generales de los límites (linealidad, límite del producto, etc) son las mismas que ya conocemos para funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.2. Continuidad de una función en un punto. Dada una función $f : E \to F$ y un punto a del dominio de f, se dice que f es continua en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Observamos en la discusión que ahora a debe estar en el dominio de f, aunque puede ser punto aislado (en cuyo caso f es automáticamente continua en a). También se propone demostrar que:

Proposición 2.1. *La función f es continua en a si y sólo si la contraimagen $f^{-1}(B_{d'}(f(a), \varepsilon)) = \{x \in E : d'(f(x), f(a)) < \varepsilon\}$ de todo entorno de $f(a)$ contiene un entorno de a.*

Demostrar que las propiedades de continuidad de la suma, producto, etc son idénticas en este caso que en el caso de las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es parte del proceso de comprensión de la noción de espacio métrico.

3. Funciones elementales

Hay un tipo de funciones entre espacios métricos que merecen atención especial: la funciones elementales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con lo que nos referimos basicamente a los polinomios en varias variables. Un poliomio en dos variables es una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tiene la forma

$$p(x, y) = \sum_{0\le i\le n;0\le j\le m} a_{i,j} x^i y^j$$

Merece la pena detenerse en ponerse ejemplos y traducir la noción de grado (que ahora será grado en x y grado en y) y en verificar que los polinomios son funciones continuas. Discutimos la forma y propiedades de los polinomios $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Para completar la exposición consideramos algunas funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, como por ejemplo las aplicaciones lineales y estudiamos su continuidad.

4. Prácticas

En una lección de tipo teórico como esta, la mejor práctica es la comprensión de las ideas expuestas. Para ello, además de contemplar ejemplos abundantes con los que ejercitarse, quizá la mejor práctica sea:

- Dar una métrica en $\mathbb{R}^n$, para $n > 2$.
- Dar la definición de función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.
- Comprobar mediante ejemplos que el límite y la continuidad de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, se puede estudiar coordenada a coordenada en el siguiente sentido:
$$\lim_{x\to a} f(x) = (\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x)).$$
Así, también se tendrá que f es continua en a si y sólo si f_1 y f_2 son continuas en a.

CAPíTULO 13

Cálculo diferencial con funciones de varias variables

Introducción: Situaciones donde aparecen funciones de varias variables. Gráficas de las funciones reales de varias variables. Conjuntos de nivel. Ejemplos y visualización.
Límites y continuidad: Definiciones de norma y entorno de un vector del plano. Definición de punto aislado y de acumulación. Definición de límite y de continuidad de una función en un punto. Visualización gráfica y ejemplos. Propiedades de los límites y de la continuidad de funciones de varias variables. Algunas consideraciones sobre funciones vectoriales.
Diferenciabilidad: En busca de la definición de difereciabilidad de una función de varias variables. Derivadas parciales. Propiedades e interpretación geométrica. Determinación del plano tangente. Definición de diferenciabilidad. La definición de diferencial. Criterio de diferenciabilidad en términos de las derivadas parciales. Propiedades de la diferencial: La regla de la cadena. Ejemplos.
Derivadas parciales iteradas: Definición de derivadas parciales iteradas. Definición de función de clase $\mathcal{C}^m$. Lema de Schwarz.

Objetivos específicos

- Entender las nociones de límite y continuidad en el contexto de las funciones de varias variables.
- Adquirir soltura en el cálculo de derivadas parciales.
- Entender la noción de función de varias variables diferenciable y saber interpretarla como una propiedad de aproximación mediante una función lineal. Entender que la mera existencia de derivadas parciales es insuficiente para determinar el plano tangente y, por tanto, para determinar la diferenciabilidad.
- Conocer la definición de diferencial.
- Saber determinar la diferenciabilidad de una función verificando la continuidad de las derivadas parciales.
- Saber usar las reglas básicas del cálculo diferencial en varias variable, en especial, la regla de la cadena.

1. Introducción

A lo largo del curso ya hemos tenido ocasión de observar que en el estudio de algunos fenómenos se requieren expresiones matemáticas que involucran dos o más variables. Por ejemplo, el área de un rectángulo en función de las longitudes de los lados. O si queremos describir cualquier fenómeno que ocurra en el plano o en el espacio – la temperatura en una determinada región del espacio, por ejemplo– necesitaremos funciones de dos o tres variables. Por lo tanto, hay gran variedad de fenómenos físicos que para ser modelizados matemáticamente necesitan funciones de varias variables. Por poner un ejemplo concreto: el alcance de un proyectil lanzado con un ángulo θ a una velocidad inicial v queda descrito por la función $A(v, \theta) = v^2 \operatorname{sen} 2\theta/g$, donde g es la constante de gravitación. En el cálculo de probabilidades se tiene la necesidad de calcular la distribución de probabilidad conjunta de varias variables aleatorias. Así, las funciones de densidad de las distribuciones serán funciones reales en varias variables y lo mismo ocurrirá con las funciones de distribución, que esta vez vendrán definidas mediante integrales múltiples, (que no se estudiarán hasta el último capítulo).

En este capítulo y el siguiente trataremos de ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones reales de varias variables;

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Si bien las funciones vectoriales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no son objeto de nuestro estudio en este curso, el estudio de su continuidad y límites va incluido en la panorámica general que presentamos para funciones en espacios métricos. Eso, y el hecho de que podemos transladar nociones de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al caso vectorial “coordenada a coordenada” hace que puedan mencionarse con tranquilidad algunas de sus propiedades y utilizarlas de modo elemental cuando sea preciso.

1.1. Gráficas de las funciones de varias variables. Para familiarizarnos con las “varias variables” empezamos poniendo algunos ejemplos de funciones reales y calculando sus dominios de definición; podrían ser:

$$\begin{aligned} lcla(x,y) &= x+y \\ b(x,y) &= xy \\ c(x,y,z) &= 1 \\ d(x,y,z) &= \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} \\ e(x,y) &= \sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-y^2}. \end{aligned}$$

Se define la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como,

$$\text{Gráfica}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in A\}.$$

Es buena idea tratar de dibujar las gráficas de algunas de las funciones anteriores. Para ayudar a visualizar la gráfica de una función de dos (o incluso de tres) variables introducimos la noción de *conjunto de nivel* de $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para un valor $c \in \mathbb{R}$ dado:

$$\{x \in A : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si $n = 2$ hablamos de curva de nivel; si $n = 3$, de superficie de nivel. Con ayuda del método de las secciones (intersecamos la gráfica con planos verticales) podemos determinar el aspecto de una gráfica. Esbozamos las gráficas de algunas funciones sencillas (por ejemplo, las que describen un paraboloide de revolución o la silla de montar) y, en una sesión práctica con los ordenadores, corregimos y completamos nuestros gráficos usando las posibilidades que ofrecen programas algunos programas.

En adelante, estudiaremos principalmente las funciones de dos variables ya que los resultados y propiedades que vamos a ver se extienden sin niguna dificultad al caso general de n variables. Con ello facilitamos la comprensión de los resultados, su escritura, y su interpretación geométrica simplemente porque es posible visualizar la gráfica de una función de dos variables.

2. Límites y continuidad

Aplicamos las nociones de límite de una función en un punto y continuidad que se vieron para funciones en espacios métricos. En el caso de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ consideramos en $\mathbb{R}^n$ la métrica usual, es decir, la que viene dada por la norma

$$\|(a_1, ..., a_n)\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

En el caso de $\mathbb{R}^2$, eso significa que la norma o módulo de un punto de coordenadas (a, b) es

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De este modo, el entorno de (a, b) de radio r será el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| < r\}.$$

Es decir, los entornos de un punto (a, b) son círculos centrados en (a, b).

Se propone entonces traducir a $\mathbb{R}^2$ las definiciones de punto de acumulación y punto aislado, y pensar en su interpretación geométrica. Recordamos también las definiciones de límite en un punto de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y la de continuidad. También se discute la traducción de las nociones para para el caso de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mencionando que lo que ya observamos en la Práctica 3 del capítulo de espacios métricos, que el límite y la continuidad de una función vectorial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se puede estudiar "coordenada a coordenada", se extiende al caso general $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Usamos la notación

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = (a, b),$$

para indicar que el límite de f en (x_0, y_0) es (a, b). Ilustramos geométricamente las nociones anteriores con algunos ejemplos.

Las propiedades básicas de los límites se obtienen transcribiendo las correspondientes para funciones de una variable o particularizando las correspondientes para espacios métricos (unicidad del límite, linealidad y estabilidad frente al producto); lo mismo ocurre con las demostraciones. Análogamente en lo que respecta a las propiedades de continuidad que se derivan de ellas.

3. Diferenciabilidad

La definición de función diferenciable $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deberá formalizar la idea intuitiva de que la gráfica de una función diferenciable debe tener bien definido un plano tangente (el equivalente a la recta tangente) a la gráfica en cada punto. A diferencia de lo que ocurre con la noción de continuidad, no está claro que sea posible transcribir (ni cómo) la definición de función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable al caso de una función real de dos variables. Ni siquiera es claro cuál debería ser la definición de plano tangente a la gráfica en un punto. Recordemos que la noción de diferenciabilidad es fundamentalmente una propiedad de aproximación y que, si en el caso de una variable lo que hacíamos era mirar localmente la gráfica de la función y encontrar que se parecía a una recta en el caso de varias variables querremos que la gráfica se parezca localmente a un plano.

3.1. Derivadas parciales. Comenzamos introduciendo la noción de *derivada parcial* que se basa en utilizar nuestro conocimiento del cálculo en una variable: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Llamamos derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) al valor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x - x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Es muy simple, se trata de derivar la función f considerada como una función en la variable x (dejando constante la segunda variable). La derivada parcial de f con respecto a y se define de forma análoga. Como la derivada parcial con respecto a x de una función de dos variables $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) no es otra cosa que la derivada en x_0 de la función $f(x, y_0)$, es claro que la existencia de $\partial f/\partial x(x_0, y_0)$ se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x, y_0)$ en (x_0, y_0) en la dirección del eje x. En particular, es también claro que las derivadas parciales verifican las mismas propiedades de linealidad y las reglas de derivación para el producto y la división que las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables. Obviamente conviene realizar algunos ejercicios de cálculo de derivadas parciales.

3.2. Determinación del plano tangente. Observamos que la definición de diferenciabilidad no puede basarse simplemente en la mera existencia de derivadas parciales. A fin de cuentas, ¿qué tienen de particular las dos direcciones elegidas – la del eje de las x y la del eje de las y–? No es difícil poner ejemplos en los que el plano determinado por las rectas tangentes a la gráfica de f en (x_0, y_0) en las direcciones de los ejes x e y, es decir,

$$\textbf{(I)} \qquad z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

no sea un plano tangente a la gráfica en dicho punto. Por otra parte, una buena noción de diferenciabilidad debería ir acompañada de una serie de propiedades –por ejemplo que se verifique la regla de la cadena, que toda función diferenciable sea continua,...– que, la mera existencia de derivadas parciales simplemente no garantiza.

¿Cuál debería ser la ecuación del plano tangente? Planteamos el problema de determinar el plano tangente teniendo en cuenta la idea básica del cálculo diferencial en una variable: aproximar la función mediante la recta tangente. Así, adoptamos provisionalmente la definición de función diferenciable en un punto (x_0, y_0) como una función $f(x, y)$ que se aproxima por el plano de ecuación (I) en el sentido:

$$(\textbf{II}) \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

Definiremos plano tangente a la función f en (x_0, y_0) como el plano (I) cuando se verifica la condición de aproximación (II). Y diremos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si tiene plano tangente en el punto.

3.3. La diferencial. El objetivo ahora es introducir la noción de *diferencial* de una función f en un punto (x_0, y_0), el equivalente en varias variables a la noción de derivada en un punto de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para ello, reformularemos la noción de de diferenciabilidad: diremos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$(\textbf{III}) \qquad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - L(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

donde $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = (y - y_0)$. Comprobamos a continuación que esta definición es equivalente a la anterior. De hecho, se tiene que si tal aplicación lineal L existe entonces las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) existen y

$$L(\Delta x, \Delta y) = \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Definimos la diferencial (o derivada) de f en (x_0, y_0) como la aplicación L, cuya matriz es

$$Df(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right].$$

Así, con un pequeño abuso de notación escribiendo $Df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$ para denotar el producto matricial de $Df(x_0, y_0)$ con la matriz columna $[\Delta x\ \Delta y]^T$, podemos interpretar la diferenciabilidad como una propiedad de aproximación tal y como hacíamos con las funciones reales de una variable; si $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, tenemos

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - Df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|)} = 0.$$

La definición que acabamos de dar de diferencial se extiende de forma natural a las funciones vectoriales. En ese caso, pongamos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la diferencial será la matriz $m \times n$ que tiene como columna j las derivadas parciales con respecto a x_j de las componentes $f_1, \ldots, f_m$ de f en el punto (x_0, y_0). Esta matriz se denomina matriz Jacobiana de f en (x_0, y_0). Es el momento de poner ejemplos.

3.4. Criterio de diferenciabilidad en términos de las derivadas parciales. Es importante saber si, tal y como ocurría para funciones de una variable, se tiene que toda función de varias variables diferenciable en un punto es continua en ese punto. Se prueba que la respuesta es afirmativa.

Es también deseable disponer de algún criterio para deducir la diferenciabilidad de una función de varias variables sin necesidad de acudir a la condición de aproximación de la definición (III), que no parece sencilla de verificar. Idealmente, puesto que estudiar la existencia de derivadas parciales es sencillo usando nuestro conocimiento del cálculo diferencial en una variable, uno querría que la existencia de derivadas parciales garantizase la diferenciabilidad de la función. Lamentablemente, esto no es cierto, podemos poner ejemplos de funciones que admiten derivadas parciales en un punto y ni siquiera son continuas en él. Sin embargo, el estudio de la diferenciabilidad no será tan terrible ya que disponemos de un criterio que, aunque no tan bueno como hubiéramos querido, acabará reduciendo nuestra tarea al uso de los conocimientos básicos del cálculo en una variable:

- *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si existen las derivadas parciales de f y son continuas en un entorno de un punto p, entonces f es diferenciable en p.*

Una función cuyas derivadas parciales existan y sean continuas se denomina función de clase $\mathcal{C}^1$. Usaremos el criterio anterior para estudiar la diferenciabilidad de algunas funciones.

3.5. Propiedades de la diferencial. La regla de la cadena. Las propiedades de la derivada de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con respecto a las operaciones y las correspondientes reglas de diferenciación se generalizan de forma inmediata a las funciones de varias variables (las demostraciones se desarrollan de forma análoga, salvando la notación). La única propiedad que requiere una atención especial es la regla de la cadena. Aunque también es cierto que la formulación de la regla de la cadena para la composición de dos funciones vectoriales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ y $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$ y $f(a) \in \mathbb{R}^k$, respectivamente, es análoga a la que teníamos en el caso de funciones de una variable;

$$\text{(IV)} \qquad D(g \circ f)(x) = Dg(f(a))Df(a).$$

El resutado, sin embargo, es ahora considerablemente más profundo que en el caso de una variable; lo veremos un poco más adelante al interpretar geométricamente estos resultados.

La demostración en este caso no es una mera traslación de la prueba para funciones de una variable; y, en general, se omitirá. Sí mostraremos la forma que la regla de la cadena adopta en los dos casos particulares que nos interesan en términos operativos. Trabajaremos bajo la hipótesis adicional de que la derivadas parciales son continuas.

Caso 1. La composición es una función real de una variable: Consideremos dos funciones, una $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciable en t_0 y otra y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\sigma(t_0)$. Si ponemos $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ se tiene para la derivada de la función $f\sigma$ en t_0 la identidad:

$$\frac{d(f\sigma)}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Una vez que hayamos comprobado, mediante algunos ejercicios, que sabemos usar la anterior fórmula correctamente, podemos sentirnos con libertad para escribir dicha fórmula en la forma abreviada (llamando $z = f\sigma$)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Caso 2. La composición es una función real de varias variables: Consideremos ahora una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable en (x_0, y_0), y otra función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $g(x_0, y_0)$. Si ponemos $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ entonces la derivada de fg en (x_0, y_0) se obtiene como el producto de dos matrices

$$\left[\frac{\partial(fg)}{\partial x} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial y}\right]_{|(x_0,y_0)} = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v}\right]_{|g(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(x_0,y_0)}$$

Es momento de discutirá la forma de las identidades que acabamos de ver para funciones en m variables; de verificará la regla de la cadena en algunos ejemplos; y de observar la relación entre la fórmula general de la regla de la cadena y los casos particulares. Cuando conozcamos la definición de gradiente y sepamos interpretarlo geométricamente (cosa que haremos en el siguiente capítulo), tendremos ocasión de profundizar en la interpretación geométrica del primer caso particular de la regla de la cadena.

4. Derivadas parciales iteradas

Introducimos las derivadas parciales iteradas, con el propósito de mostrar el lema de Schwarz de las derivadas parciales cruzadas.

Consideremos una función en dos variable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si existen las derivadas parciales de f en un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) y a su vez $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciables en $p = (x_0, y_0)$, llamaremos derivadas parciales segundas o derivadas parciales iteradas de segundo orden en p a las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en p. La notación que usamos es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(p), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p).$$

Llamaremos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ a las funciones que admiten derivadas parciales y parciales de segundo orden continuas Al hacer algunos ejercicios constatamos que las derivadas parciales de orden superior con respecto a las dos variables son iguales cuando cambiamos el orden en el que derivamos. Se tiene que esta propiedad la verifican las funciones de clase $\mathcal{C}^2$;

- (Lema de Schwarz) *Si $f(x, y)$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Se discutirá la igualdad de las segundas derivadas parciales mixtas con algunos ejemplos concretos.

Las derivadas parciales de f de orden $m > 2$ se definen y se denotan de forma análoga: si las derivadas parciales de orden $m - 1$ son diferenciables en p entonces las derivadas parciales m-ésimas de f en p son las las derivadas parciales de las $(m-1)$-ésimas y las denotamos

$$\frac{\partial^{m_1+m_2} f}{\partial x^{m_1} \partial x^{m_2}}(p),$$

donde m_1 y m_2 indican cuántas veces derivamos con respecto a x y cuántas con respecto a y, respectivamente $(m_1 + m_2 = m)$. Llamaremos funciones de clase $\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$, a las funciones que admiten derivadas parciales iteradas continuas hasta el orden m.

5. Prácticas

La mayor parte de las prácticas de este capítulo consistirán fundamentalemente en hacer abundantes ejercicios centrados en la regla de la cadena y/o en el cálculo de derivadas parciales iteradas.

Esbozamos las gráficas de algunas funciones de varias variables sencillas y, en una sesión práctica con los ordenadores, corregimos y completamos nuestros gráficos usando las posibilidades que ofrecen programas como MATLAB o MATHEMATICA.

Usaremos también los ordenadores para visualizar algunas gráficas de funciones, como por ejemplo, las que describen un paraboloide de revolución o la silla de montar; así podemos ilustrar algunos de los casos patológicos que hemos mencionado, como la existencia de derivadas parciales en puntos de discontinuidad, o que el plano determinado por las derivadas parciales no es tangente a la gráfica.

Puede hacerse una pequeña introducción a las ecuaciones en derivadas parciales mostrando algunas relevantes como la ecuación de ondas, del calor o del potencial.

CAPíTULO 14

Aplicaciones geométricas del cálculo diferencial

Gradientes y derivadas direccionales: Definición de gradiente. Definición de derivada direccional. Relación entre ambas nociones. Espacio tangente a un conjunto de nivel. Ejemplos. Plano tangente a la gráfica de una función. Ejemplos.
La fórmula de Taylor: El polinomio de Taylor de orden dos. El Hessiano. Comportamiento asintótico del error: fórmula de Taylor de orden dos. Fórmula del resto de Lagrange. Ejemplos.
Extremos locales de funciones: Definición de extremos locales. Puntos críticos. El polinomio de Taylor en un punto crítico. Clasificación de puntos críticos mediante el estudio del Hessiano. Ejemplos.
Optimización de funciones. Extremos condicionados: Introducción a los problemas de optimización. Extremos condicionados. Teorema de los multiplicadores de Lagrange. Criterio de las segundas derivadas para determinar extremos condicionados.

Objetivos específicos

- Entender las nociones de gradiente y derivadas direccionales y saber interpretar geométricamente el gradiente a través de su relación con las derivadas direccionales.
- Mejorar la comprensión de la noción de plano tangente a una gráfica a través del gradiente.
- Entender operativamente la importancia de la regla de la cadena.
- Conocer el polinomio de Taylor de una función de varias variables, y entender que el teorema de Taylor para funciones de varias variables es la generalización natural del de una variable.
- Saber untilizar la fórmula de Taylor para analizar los puntos críticos de la función.
- Saber plantear y resolver problemas de optimización en varias variables.

1. Introducción

Nuestro propósito en este capítulo es ver algunas aplicaciones geométricas del cálculo diferencial en varias variables, lo que incluye especialmente aplicaciones de la regla de la cadena. Nos proponemos aprender a razonar geométricamente con funciones de varias variables: queremos identificar y calcular el espacio tangente a un conjunto de nivel de una función dada (en particular, encontramos otra forma de identificar y calcular el plano tangente a la gráfica de una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), detectar los "puntos críticos" donde la derivada en cualquier dirección de la función es nula , analizar el comportamiento de la función en tales puntos y, en particular, poder identificar y calcular los extremos relativos de una función real de dos variables. Posteriormente, profundizaremos un poco más en lo aprendido sobre extremos relativos con el fin de poder plantear y resolver algunos problemas de optimización de funciones sobre conjuntos de nivel de otras.

Necesitamos dos herramientas fundamentales para conseguir nuestros objetivos: en primer lugar, para razonar geométricamente con funciones de varias variables, necesitaremos conocer las nociones de gradiente y derivadas direccionales y, por supuesto, la relación entre ellas. De aquí obtendremos la definición de espacio tangente a un conjunto de nivel y los primeros recursos geométricos para la detección y el cálculo de extremos relativos. En segundo lugar, la fórmula de Taylor para funciones de dos variables nos permitirá saber qué ocurre en los puntos críticos de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sabiendo lo que le ocurre en dichos puntos al polinomio de Taylor de segundo orden de f.

Puesto que los problemas geométricos que veremos en este capítulo se plantearán en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ será suficiente introducir las nociones y probar los resultados para funciones reales de tres variables. Es mejor así puesto que para estudiar algunos aspectos de la gráfica de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como calcular el plano tangente usando el gradiente, deberemos pensar la gráfica de f como la superficie de nivel del valor cero de la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.

2. Gradientes y derivadas direccionales

Introducimos la noción de gradiente de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$: se trata del vector de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right).$$

Es decir, la diferencial de f expresada como vector del espacio ($\mathbb{R}^3$ en este caso). A continuación, definimos la derivada direccional de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en un punto p en la dirección de un vector v como

$$D_v f(p) \lim_{t\to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

es decir, la derivada de la función $h(t) = f(p + tv)$ en $t = 0$. Geométricamente, es claro que $D_v f(p)$ mide la variación de f al desplazarnos a partir de p en la dirección de v. Las propias derivadas parciales son un caso particular de derivadas direccionales eligiendo como direcciones las de los ejes de coordenadas. Como consecuencia inmediata de la regla de la cadena se obtiene la relación fundamental entre el gradiente y la derivada direccional de una función:

- *Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces existen todas las derivadas direccionales. Además, para cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ y para cada vector v* se tiene

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v.$$

El segundo miembro de la igualdad anterior es el producto escalar del gradiente de f en p y del vector v. Gracias a la anterior fórmula (donde podemos considerar v de norma 1) podemos interpretar el gradiente, en caso de ser no nulo, como "el vector que indica la dirección de máximo crecimiento de f en cada punto": $D_v f(p)$ será máxima cuando el ángulo entre los vectores v y $\nabla f(p)$ sea 0 (el coseno sea 1) , lo que significa que, efectivamente, el crecimiento de f en p es máximo en la dirección del gradiente en p. Por el contrario, si seguimos la dirección del vector tangente a una trayectoria de una superficie de nivel de f tendremos que la derivada es 0, por tanto el producto escalar es 0 y el vector tangente y el gradiente son ortogonales. Esta última observación hace que sea razonable definir el plano tangente a una superficie $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ en un punto (x_0, y_0, z_0) como el conjunto

$$\{(x, y, x) : \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)0\}.$$

Esta definición extiende a la de plano tangente en un punto a la gráfica de una función $g(x, y)$ sin más que considerar la gráfica de g como la superficie de nivel $g(x, y) - z = 0$. Nos detendremos en hacer ejercicios de cálculo de planos y rectas tangentes a superficies y curvas, respectivamente.

3. Teorema de Taylor

Nuestro objetivo principal al introducir el polinomio de Taylor para funciones de varias variables (en realidad, lo haremos para funciones de dos variables) es conseguir una aproximación suficientemente buena de las funciones de modo que se pueda detectar y analizar la curvatura de la gráfica observando la desviación de la misma con respecto al plano tangente.

3.1. El polinomio de Taylor de orden dos. Comenzaremos recordando la noción de polinomio de varias variables. Acto seguido, introducimos el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que admita derivadas parciales de segundo orden en un punto $p = (x_0, y_0)$ como

$$T_2(x, y) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y - y_0)^2\right]$$

que es el único polinomio de grado menor o igual que dos que tiene las mismas derivadas parciales que f hasta el segundo orden en el punto (x_0, y_0).

Definiremos Hessiano de una función de dos variables; si $Hf(p)$ es el Hessiano de f en p, podremos expresar el polinomio anterior de forma matricial

$$T_2(x, y) = f(p) + Df(p)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x - x_0, y - y_0]Hf(p)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

La anterior expresión permite ver la analogía con la fórmula del polinomio de Taylor de orden dos de una función en una variable.

3.2. La fórmula de Taylor de orden dos. A continuación analizamos el error cometido al aproximar $f(x, y)$ mediante $T_2(x, y)$ en las cercanías del punto (x_0, y_0). Si escribimos $R_1(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$ se seguirá inmediatamente de la definición de diferenciabilidad que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_1(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0,$$

es decir, el error al aproximar f por el polinomio de Taylor de grado uno en (x_0, y_0) es un infinitésimo de orden uno en (x_0, y_0). Sin embargo, cuando aproximamos f por el polinomio de Taylor de segundo orden, estudiar el aspecto asintótico del error $R_2(x, y) = f(x, y) - T_2(x, y)$ resulta más complicado. El teorema de Taylor asegura que $R_2(x, y)$ es un infinitésimo de orden dos en (x_0, y_0); precisamente: *si f es de clase $\mathcal{C}^3$ entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|^2} = 0.$$

Para el estudio de los extremos relativos de una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nos hará falta conocer una fórmula explícita del error o residuo R_2. Se tiene la fórmula de resto de Lagrange:

$$R_2(x, y) = \frac{1}{3!}\sum_{i+j=3}(x - x_0)^i(y - y_0)^j\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j}(\xi),$$

donde ξ representa un punto que pertenece al segmento que une (x_0, y_0) con (x, y). La discusión tratará sobre el parecido de la anterior fórmula con la correspondiente para las funciones de una variable; el cálculo del polinomio de Taylor de segundo orden de algunas funciones, y la verificación del comportamiento asintótico del error.

4. Extremos locales de funciones de dos variables

4.1. Puntos críticos. Comenzamos definiendo extremo (máximo y mínimo) local de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. De nuevo como consecuencia de la regla de la cadena, se obtiene una condición necesaria para la existencia de puntos extremos análoga a la que se tenía en cálculo diferencial en una variable: *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y (x_0, y_0) es un extremo local entonces* $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Los puntos donde se anula el gradiente de f se denominan puntos críticos de f.

Examinamos algunos ejemplos, algunos sorprendentes para los alunmnos, como los puntos silla que, a pesar de ser puntos críticos, no pueden ser máximo ni mínimo ya que la función en ese punto alcanza un máximo en una dirección y un mínimo en otra. Esto muestra que la condición de ser punto crítico no es suficiente para ser extremo.

4.2. El polinomio de Taylor en un punto crítico. Para analizar estos puntos recurrimos a la fórmula de Taylor de segundo orden. Observamos en primer lugar que si f es una función de clase $\mathcal{C}^2$ y $p = (x_0, y_0)$ es un punto crítico de f entonces el polinomio de Taylor de segundo grado en p es

$$T_2(p + \triangle x) = f(p) + \frac{1}{2!}\triangle x^T Hf(p)\triangle x,$$

donde $\triangle x = (x, y) - (x_0, y_0)$ y $\triangle x^T$ el vector $\triangle x$ representado como matriz fila. Es claro que, salvo el término constante $f(p)$, T_2 es una forma cuadrática cuya matriz simétrica asociada es precisamente $Hf(x)$. Resulta claro que T_2 tiene una máximo (respectivamente mínimo) relativo estricto en p cuando $\triangle x^T Hf(p)\triangle x < 0$ (respectivamente $\triangle x^T Hf(p)\triangle x > 0$), para todo $\triangle x$. Del mismo modo que ocurría en el cálculo en una variable, se puede probar (daremos sólo las directrices de la prueba) usando el teorema de Taylor que la función f tiene en p un extremo del mismo tipo que el polinomio de Taylor. En particular, hemos descubierto que el Hessiano de una función de dos variables representa el papel que la segunda derivada desempeñaba en el estudio de extremos de funciones de una variable.

4.3. Clasificación de puntos críticos según el Hessiano. Finalmente, aplicando al Hessiano de f el criterio que decide si una función cuadrática de dos variables es definido-positiva o definido-negativa o ninguna de las dos cosas, obtenemos el criterio fundamental para decidir si un punto crítico es mínimo estricto, máximo estricto o "punto silla": *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^3$ y $(x_0, y_0) \in U$ un punto crítico de f y $|H| \neq 0$:*

- *Si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ *y* $|H| > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ *es un mínimo local estricto.*
- *Si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ *y* $\det|H| > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ *es un máximo local estricto.*
- Si $|H| < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ *es un punto silla.*

Aunque no se estudian en este curso, los puntos críticos donde $\det H = 0$ se denominan puntos degenerados. Para conocer el aspecto de la gráfica cerca de un punto degenerado se necesitan otros métodos. Concluimos la exposición localizando máximos, mínimos y puntos silla en diferentes funciones.

5. Optimización de funciones. Extremos condicionados

5.1. Los problemas de optimización. Es frecuente encontrarse con situaciones en las que interesa encontrar los extremos de una función de varias variables que están relacionadas entre sí por ciertas condiciones. Pueden ponerse diversos ejemplos de situaciones de este tipo: calcular el volumen máximo de una caja en forma de paralepípedo construida a partir de un trozo de cartón de area determinada. En economía se plantea el problema de maximizar la ganancia que se obtiene cuando vendemos dos tipos de mercancía sujetos a unas condiciones de capital. En estadística, nos encontramos con los problemas de regresión; pongamos que queremos determinar, dadas dos variables aleatorias dependientes X, Y, la función $y = f(x)$ que "mejor" describe la relación entre X e Y, en términos estadísticos, se tratará de encontrar la función que minimice el error cuadrático medio $E[(Y - f(X))^2]$. En este caso, la representación en el plano de una muestra suficientemente grande de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) –denominada a veces diagrama de dispersión– dará una idea del tipo de función (lineal, polinómica, exponencial,...) cuya gráfica se ajusta mejor al diagrama de dispersión. Así, elegida la forma genérica de la función f en términos de parámetros, $f = f(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, nuestro problema se convierte entonces en un problema de calcular el mínimo de la función "error cuadrático medio" vista como función de los parámetros que determinan la función f;

$$g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = E[(Y - f(X, \lambda_1, \dots, \lambda_n))].$$

Este método de obtención de una función $y = f(x)$ a partir de una colección de datos (x_i, y_i), ampliamente difundido más allá de la estadística, se conoce como el método de los cuadrados mínimos, y en su versión general se trata de encontrar la función f que haga mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones de los datos (x_i, y_i) con respecto a los $(x_i, f(x_i))$.

5.2. Extremos condicionados. El propósito de esta sección es desarrollar algunos métodos para analizar problemas de cálulo de extremos de una función sujetos a ciertas condiciones sobre las variables. Estos problemas se denominan con frecuencia problemas de *extremos condicionados.* La formulación general de estos problemas de optimización es la siguiente: dada una función real en varias variables $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (como siempre, lo que digamos para tres variables se extenderá de modo natural a una cantidad n cualquiera), estamos interesados en estudiar la existencia de extremos locales de f pero no en todo el dominio de definición de f, sino restringidos a una superficie de nivel S de otra función $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Pongamos $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = c\}$. Considerando que f y g son funciones diferenciables en U, el teorema de los multiplicadores de Lagrange da una condición necesaria para la existencia de extremo de f en S:

- (Teorema de los multiplicadores de Lagrange) *Sea $x_0 \in S$ tal que $\nabla g(x_0) \neq 0$. Si x_0 es un extremo de f relativo a S entonces hay un número real λ tal que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

A la constante λ se le llama multiplicador de Lagrange. No demostraremos este teorema. Lo que nos interesa es observar que: *si la restricción de f a S tiene un extremo en x_0, entonces $\nabla f(x_0)$ es perpendicular a S en x_0.*

En muchos casos, esta versión geométrica del teorema de los multiplicadores será mucho más fácil de aplicar que el propio teorema. Después de haber identificado los "puntos críticos restringidos", necesitaremos herramientas para analizarlos. Desde luego, no cabe tener esperanzas de que las técnicas vistas en la sección anterior para el análisis de extremos en términos de las segundas derivadas parciales nos ayuden a determinar si los los puntos críticos restringidos que hemos detectado son extremos o no. La razón es que un extremo restringido no siempre es un punto crítico de la función. Vemos algunos ejemplos en los que conseguimos hallar los extremos condicionados por mera inspección.

5.3. Criterio de las segundas derivadas para extremos condicionados. Por último, mostramos un criterio para determinar los extremos condicionados en términos de las segundas derivadas. Comencemos observando que encontrar los puntos x_0 tales que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ para algún λ es lo mismo que plantear el problem de calcular los puntos críticos de la función auxiliar $h(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda[g(x, y, z) - c]$ – donde c es una constante–.

En las condiciones del teorema de los multiplicadores, supongamos que x_0 es tal que $\nabla g(x_0) \neq 0$ y que existe λ tal que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$. Consideramos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante $|H_l|$ del denominado Hessiano limitado en x_0. Se tiene que:

- *Si $|H_l| > 0 \Longrightarrow x_0$ es un máximo local estricto para $f_{|S}$.*
- *Si $|H_l| < 0 \Longrightarrow x_0$ es un mínimo local estricto para $f_{|S}$.*
- *Si $|H_l| = 0$ el criterio no concluye.*

6. Prácticas

Las prácticas que realizaremos tratarán de combinar los problemas tradicionales sobre cálculo de extremos, planos tangentes, ... con alguna sesión de ordenadores en las que trataremos de usar las posibilidades MATLAB o MATHEMATICA para representar gráficas, conjuntos de nivel, gradientes... Pretendemos así conseguir una mejor comprensión geométrica de los contenidos del tema.

Plantearemos y resolveremos también problemas de optimización en el contexto de la economía, la física y, especialmente, de la estadística. En este último contexto, nos dedicaremos a plantear diferentes problemas de regresión para resolver minimizando el error cuadrático medio. Lo haremos considerando fundamentalmente variables aleatorias discretas, con las que minimizar el error cuadrático medio se traduce en aplicar el método de los cuadrados mínimos. Podemos tambier plantear problemas con variables continuas, sin embargo, en este caso, aparecen integrales dobles que aún no sabemos resolver. No obstante, provecharemos esta circunstancia para motivar la necesidad de las siguiente lecciones dedicadas al cálculo integral en varias variables.

CAPíTULO 15

Integración de funciones de varias variables

Integración sobre un rectángulo: Integral de Riemann. Interpretación geométrica. Propiedades de la integral. Continuidad e integrabilidad. Integrales iteradas. Teorema de Fubini. Ejemplos.

Integración sobre regiones más generales: Regiones elementales del plano. Integración en regiones elementales. Cambio de orden en la integración iterada. Ejemplos. Extensión a las integrales triples.

Cambio de variables: El teorema del cambio de variables. Interpretación geométrica. Cambios de coordenadas más usuales: transformaciones lineales, coordenadas polares, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas. Ejemplos.

Aplicaciones de las integrales dobles y triples: Cálculo de áreas: áreas elementales, superficies. Cálculo de volúmenes: con integrales dobles, con integrales triples. Aplicaciones al cálculo de probabilidades: integrales impropias, aplicaciones, distribución de funciones de variables aleatorias continuas.

Objetivos específicos

- Comprender la noción de integral múltiple y su interpretación geométrica en los casos de dos y tres variables.
- Entender la diferencia entre integral múltiple e integrales iteradas, saber cuándo se puede pasar de una a las otras (teorema de Fubini) y cómo se puede cambiar el orden de integración sobre regiones (elementales) generales del plano y del espacio.
- Aprender las técnicas básicas para calcular integrales dobles y triples, especialmente, la técnica del cambio de variables y los cambios más usuales.
- Saber modelizar los problemas de cálculo de volúmenes y áreas mediante el planteamiento de integrales tanto simples, como dobles o triples. En particular, saber razonar geométricamente para poder reconocer el tipo de superficie o cuerpo que se tiene y poder determinar la región de integración.
- Entender la noción de integral impropia (sobre una región elemental no acotada) y la relación con las integrales impropias iteradas.

1. Integración sobre un rectángulo

Para motivar la definición formal (de Riemann) de función (de dos variables) integrable sobre un rectángulo introducimos en primer lugar la noción intuitiva de “integral” de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, sobre un conjunto $R = [a, b] \times [c, d]$ como el volumen subyacente a la gráfica de la función sobre R. Una vez visualizada geométricamente esta idea nuestro siguiente paso es formalizarla matemáticamente mediante la definición de integral de Riemann. Al contrario de lo que ocurre con la integración en una variable, la teoría de Riemann para varias variables resulta demasiado complicada para la poca utilidad que tiene en cuanto a las aplicaciones. Por esta razón, damos la definición de función integrable y de integral (de Riemann) sin más propósito que conseguir que el alumno vea formalizada la idea intuitiva de integral doble como un volumen.

El tratamiento es similar al de una variable; se trata de definir la integral doble como un límite de una sucesión de sumas. Definimos en primer lugar *partición regular* de un rectángulo

$R=[a,b]\times[c,d]$ como el conjunto de rectángulos $R_{ik}=I_i\times J_k\subset R$ generados por particiones (regulares) $\{I_i : i=0,\ldots,n\}$ y $\{J_k, k=0,\ldots,n\}$ de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Si $f: R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función acotada y, pongamos, $\mathcal{P}=\{R_{ij}\}$ es la partición de R, se denomina suma de Riemann de f relativa a una colección de puntos $c_{ik}\in R_{ik}$ al valor

$$S_n=\sum_{i,k=0}^{n} f_{ik}(c_{ik})A_{ik},$$

donde cada A_{ik} es el área del rectángulo R_{ik}. Por tanto, se dice que f es integrable (en sentido Riemann) sobre R si para cualquier selección de puntos $c_{ik}\in R_{ik}$ existe el límite de la sucesión (S_n) cuando n tiende a infinito (cuando el cardinal de las particiones tiende a infinito) y es el mismo en todos los casos. Llamamos *integral* (de Riemann) de f al valor de dicho límite y lo denotamos de cualquiera de las siguientes formas, según interese:

$$\int_R f, \qquad \int\int_R f(x,y)dxdy, \quad \text{o} \quad \int_R f(x,y)dxdy.$$

Geométricamente, es claro ahora de qué manera se interpreta la integral de Riemann de una función $f\geq 0$ sobre un rectángulo como un volumen: es el límite cuando el cardinal de las particiones tiende a infinito de los volúmenes de los paralepípedos circunscritos e inscritos a la gráfica de f. Si $f<0$, interpretamos la integral como un volumen con signo. Si f toma valores positivos y negativos, veremos que la propiedad de la integral de ser aditiva respecto del rectángulo nos permite calcular el volumen encerrado por la gráfica y el rectángulo cambiando el signo de la integral en los subrectángulos donde sea negativa.

De la definición de integral como límite de sumas y de las propiedades de los límites se deduce la linealidad de la integral, la monotonía y la desigualdad

$$\left|\int_R f\right|\leq\int_R |f|.$$

Otra aplicación de la linealidad de la integral es la provechosa propiedad de ser *aditiva respecto del rectángulo*; si $R_1,\ldots,R_n$ es una partición en rectángulos $R=R_1\cup\cdots\cup R_n$ del un rectángulo R, f es integrable en cada R_i y f es acotada en R, entonces f es integrable sobre R y

$$\int_R f=\sum_{i=1}^{n}\int_{R_i} f.$$

1.1. Continuidad e integrabilidad. Enunciamos un importante resultado: *toda función continua en un rectángulo es integrable* y procedemos a su discusión. Durante ésta, daremos las directrices de la demostración: la prueba se apoya en que toda función real de dos variable continua en un rectángulo cerrado es uniformemente continua (el análogo para dos variables al teorema que dice que toda función de una variable continua en un intevalo cerrado es uniformemente continua). La definición de continuidad uniforme para funciones de varias variables es enteramente análoga al caso de una variable. Usando este resultado, se probaría que sobre un rectángulo toda sucesión de sumas de Riemann de f converge a algun valor, y que dicho valor no depende de las elecciones que se hagan de los valores c_{ik}.

Podemos también discutir brevemente la integrabilidad de las funciones acotadas sobre un rectángulo que no tenga "demasiadas" discontinuidades. Es claro que si la función es discontinua en un punto, eso no afecta a la integrabilidad. Lo mismo en un conjunto finito de puntos; o en una recta. Discutiremos cómo medir el tamaño del conjunto de discontinuidades de una función: se puede introducir la noción de *conjunto de medida nula* –el conjunto puede recubrirse por una cantidad finita de rectángulos de área tan pequeña como queramos–; y observar que una curva regular, como la gráfica de una función continua $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de medida nula. Enunciamos pues el resultado: *Toda función acotada sobre un rectángulo R con un conjunto de discontinuidades de medida nula es integrable en R.*

1.2. Integrales iteradas. Teorema de Fubini. El teorema fundamental del cálculo nos permitía calcular una integral en un intervalo $[a,b]$ sin necesidad de acudir a la definición de integral. Ahora será el teorema de Fubini el que nos permita calcular una integral sobre un rectángulo mediante el cálculo de integrales simples iteradas.

- (Teorema de Fubini) Si f es una función real continua sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

La discusión de la demostración se hará usando el teorema del valor medio integral. En adelante, para las integrales simples iteradas usaremos la notación $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$. Nótese que el teorema de Fubini nos dice no sólo que la integral sobre un rectángulo de una función continua se reduce a un par de integrales simples iteradas, sino también que el orden de integración es irrelevante. Observemos a continuación que este teorema permite una sencilla interpretación geométrica de la integral doble como un volumen: si $f \geq 0$ y llamamos C al cuerpo que determinan la gráfica de f y el rectángulo R, el valor $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ representa el área de la sección de C producida al cortar C con un plano paralelo al xz. Ahora bien, puesto que $A(y)$ es integrable, del cálculo integral en una variable deducimos inmediatamente que el volumen de C viene dado $\int_c^d A(y)dy$.

Aunque no lo probaremos, el teorema de Fubini se extiende para funciones con un conjunto de discontinuidades de medida nula. Se harán algunos ejercicios donde verificamos que cambiar el orden de integración en las integrales iteradas no altera el resultado.

2. Integración en regiones más generales

Nuestro objetivo ahora es definir la integral de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en regiones más generales que rectángulos. Y, también, encontrar una técnica para evaluar dichas integrales. Las regiones que consideraremos serán regiones acotadas de tres tipos:

- Regiones de tipo I: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, donde $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y tales que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, para todo $x \in [a,b]$.
- Regiones de tipo II: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$, donde $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y tales que $\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$, para todo $y \in [c,d]$.
- Regiones de tipo III: Son aquellas regiones del plano que son a la vez de tipo I y tipo II.

Con frecuencia, nos referiremos a estos tipos de regiones como *regiones elementales* del plano. Ponemos ejemplos gráficos de regiones de cada uno de los tipos y subrayamos que las regiones de tipo III (por ejemplo, el círculo unidad) nos interesan especialmente porque son las únicas donde será posible cambiar el oden de integración, una vez sepamos, claro, que podemos reducir la integral doble a integrales simples iteradas. Procederemos como sigue: sea S una región elemental del plano (o una unión finita de ellas) y $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua salvo quizás en una cantidad de puntos de medida nula. Consideremos un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ que contenga a la región S. Definimos una nueva función sobre R,

$$f_S(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \notin S \end{cases}$$

Puesto que el conjunto de discontinuidades de f en S es de medida nula, el de discontinuidades de f_S es también de medida nula ya que los únicos puntos de discontinuidad de f_S son aquellos de la "frontera" de S en los que f no se anula, y la medida de dicho conjunto es cero. Luego el teorema de Fubini nos permite calcular $\int_R f_S$ como una integral iterada;

$\int_R f_S = \int_a^b \int_c^d f_S(x,y)dydx$. Pero por la forma en que se ha definido f_S, se tiene

$$\int_c^d f_S(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

si S es de tipo I, y

$$\int_a^b f_S(x,y)dx = \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx,$$

si S es de tipo II. Es decir, el resultado de la integración no depende del rectángulo R elegido, como debía suceder. Se realizarán ejercicios de modo que aprendamos, entre otras cosas, a cambiar el orden de integración (cuando la región sea de tipo III), a pasar de una integral iterada a una integral doble, etc...

2.1. Integración en tres variables. A continuación indicaremos cómo pasar de dos a tres variables. El proceso es enteramente análogo al de integración de funciones de dos variables por lo que sólo daremos algunas indicaciones. La definición de integral de Riemann de una función $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sobre un paralepípedo rectangular D será el límite de una sucesión de sumas, donde los sumandos son en esta ocasión de la forma $f(c_{ijk})\Delta V_{ijk}$, con c_{ijk} pertenecientes a los subparalepípedos D_{ijk} que constituyen una partición de D y ΔV_{ijk} son los volúmenes de D_{ijk}. Introducimos la notación correspondiente e indicamos que el teorema de Fubini se extiende de modo natural a tres variables, debemos poner especial cuidado en observar que ahora dicho teorema nos permite bajar de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, del mismo modo que antes bajábamos de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Esto nos permite reducir una integral triple a integrales simples iteradas, y las seis posibilidades dan el mismo valor. Vemos ejemplos y realizamos algunos ejercicios.

El método de integración de funciones de tres variables sobre regiones más generales que paralepípedos rectangulares también es análogo al de dos variables. Sólo necesitamos extender las características de las regiones de tipo I, II y III a regiones del espacio. A estas regiones las llamaremos en adelante *cuerpos elementales.*

3. Cambio de variables

En el capítulo dedicado al calculo integral en una variable vimos cómo, bajo ciertas condiciones, podemos efectuar un cambio de variable con el que, generalmente, conseguimos simplificar la función que estemos integrando. Sin embargo, en la integración de funciones reales de dos o tres variables el objetivo más frecuente será simplificar la región de integración.

Comencemos con el cambio de variables en una integral doble. El planteamiento general es el siguiente: Dadas dos regiones S y S' del tipo I o II en $\mathbb{R}^2$, y una función diferenciable T tal que $T(S') = S$. Expresemos la función T en términos de sus funciones coordenadas del siguiente modo: $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Sea $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable en S, queremos calcular la integral de f sobre S como una integral de $f \circ T$ sobre S'. Es esencial observar que no es cierto en general que $\int\int_S f dxdy = \int\int_{S'} f(T(u,v))dudv$, ya que el área de $T(S')$ no es necesariamente igual al área de S. Así, es necesario tener en cuenta cómo varía el área de un cuadrado al aplicar T. En las condiciones anteriores y suponiedo además que T es inyectiva en S' y de clase $\mathcal{C}^1$ (excepto quizá en un conjunto de medida nula), la fórmula de cambio de variables es:

$$(*) \qquad \int\int_S f(x,y)dxdy = \int\int_{S'} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv,$$

donde $J(u,v)$ es el Jacobiano de T en (u,v). El papel del Jacobiano en esta fórmula es precisamente el de medir cómo transforma T el área de la región. Nótese además la analogía con la fórmula del método de sustitución en una variable

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

No llevaremos a cabo la demostración de la fórmula $(*)$, a cambio, haremos una interpretación geométrica de la misma en el caso en el que S es un rectángulo y la función $f = 1$.

La extensión de la fórmula del cambio de variables a las integrales triples es clara. Analicemos ahora los cambios de coordenadas más usuales en integrales dobles y triples.

• *Transformaciones lineales.* Si T es una aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a saber, $T(u, v) = (au + bv, cu + dv)$, con a, b, c y d constantes (y $ad - bc \neq 0$ para que el Jacobiano sea no nulo), T transforma un rectángulo uv en un cuadrilátero xy cuya área es la de uv multiplicada por el factor $|J(u, v)|$. Es obvia en este caso la forma que adopta la fórmula del cambio de variable;

$$\int\int_S f(x, y)dxdy = |ad - bc| \int\int_{S'} f(au + bv, cu + dv)dudv.$$

Mostramos un ejemplo en el que se muestre la utilidad de un cambio lineal de variables.

• *Coordenadas polares.* En este caso consideramos que la transformación de coordenadas se efectúa a través de la función $T : (0, a] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. La imagen por T de un rectángulo $r\theta$ es un sector de ángulo θ del área delimitada por dos círculos concéntricos tal que la diferencia de sus radios es r. La fórmula de cambio a coordenadas polares será

$$\int\int_S f(x, y)dxdy = \int\int_{S'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)rdrd\theta.$$

Ponemos algún ejemplo en el que observemos que el cambio a coordenadas polares es especialmente interesante si r o θ son constantes a lo largo de las fronteras de la región de integración.

• *Coordenadas cilíndricas.* El cambio a coordenadas cilíndricas se efectua mediante la transformación $T(r, \theta, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z)$, definida en $(0, a] \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ (para que sea inyectiva). Obviamente, T transforma el cubo $r\theta z$ en el cuerpo generado por el desplazamiento vertical z de la transformación polar de xy. Obtenemos la fórmula

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_{S'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)rdrd\theta dz.$$

• *Coordenadas esféricas.* Decimos que hacemos un cambio a coordenadas esféricas cuando aplicamos la transformación $T(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\cos\phi)$. Consideramos que T está definida en $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi < \pi$. Para visualizar el cuerpo en el que T transforma un paralepípedo $\rho\theta\phi$ fijamos cada una de las variables moviendo las otras. La fórmula de cambio a coordenadas esféricas que se obtiene es

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_{S'} f(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi d\rho d\theta d\phi.$$

Observamos que las anteriores fórmulas son válidas incluso en los valores de las variables en los puntos del dominio de T donde pudiera anularse el Jacobiano, ya que en cualquier caso se trataría de conjuntos de medida nula. Finalmente, hacemos ejercicios para practicar todos los cambios de coordenadas vistos.

4. Aplicaciones inmediatas de la integral

4.1. Cálculo de áreas. Veamos cómo calcular áreas usando integrales dobles.

• *Áreas de regiones elementales del plano.* El área $A(S)$ de una región S elemental (de tipo I o II) del plano puede calcularse mediante una integral doble teniendo en cuenta que se trata de la integral sobre S de la función $f(x, y) = 1$. Pongamos la fórmula para S una región del tipo I, es decir, una región determinada por las gráficas de dos funciones $\varphi_1(x)$ y φ_2:

$$A(S) = \int\int_S dxdy = \int_a^b [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]dx.$$

La fórmula para regiones del el tipo II se obtendrá de forma análoga. Hacemos algunos ejercicios.

• *Áreas de superficies.* Supongamos que queremos calcular el área de una superficie S descrita por $z = f(x, y)$, con f de clase $\mathcal{C}^1$, limitada por una curva γ. Sea D la proyección de la curva γ al plano xy. Deducimos geométricamente la fórmula del área de S; hacemos una partición de la región de integración D en subregiones elementales de área Δs_i (a partir de ahora usamos la mima notación, Δs_i, para la región y para el área). En cada subregión Δs_i elegimos un punto y consideramos el plano tangente a la superficie en ese punto. Elegimos ahora una subregión elemental $\Delta\sigma_i$ del plano tangente que se proyecte en Δs_i. El área de S se define como el límite cuando $\Delta s_i \to 0$ de la sucesión de sumas $\sum \Delta\sigma_i$. Ahora es fácil deducir la fórmula que buscábamos:

$$A(S) = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Teniendo en cuenta que la integral anterior se reduce, gracias al teorema de Fubini, a integrales simples iteradas, comparamos esta fórmula con la que obtuvimos mediante integración en una variable para la superficie de un cuerpo de revolución. Como ejercicio, calculamos la superficie de una esfera.

4.2. Cálculo de volúmenes. Ya dedujimos en el cálculo integral en una variable fórmulas de integración simple para el cálculo de ciertos volúmenes. Vamos a ver ahora cómo calcular volúmenes con integrales dobles y triples.

• *Cálculo de volúmenes mediante integrales dobles.* El teorema de Fubini nos permite calcular el volumen $V(C)$ de un cuerpo C determinado por una región elemental D del plano y la gráfica de una función $f(x, y)$ continua en D (o con, a lo sumo, un conjunto de discontinuidades de medida nula) mediante integrales iteradas. Supongamos que D es de tipo I y que $f \geq 0$ sobre D. La integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ representa el área de una sección de C obtenida al intersecar C con un plano paralelo al plano yz. Por tanto, por lo visto en el cálculo integral en una variable y por el teorema de Fubini, tendremos que el volumen de C coincide con el valor de la integral de f en D;

$$V(C) = \int\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dydx.$$

Hemos de tener en cuenta que si f toma valores negativos, es posible calcular el volumen del cuerpo determinado por la gráfica de f y la región D, dividiendo D en dominios más pequeños donde la función sea sólo positiva o sólo negativa, y cambiando después el signo de f en las subregiones donde sea negativa. En general, si f y g son continuas en D y tales que $f \leq g$ en D, el volumen encerrado por las gráficas de f y g viene dado por la integral

$$\int\int_D (g - f)(x, y)dxdy.$$

Un caso particular de esta situación es aquel en el que las gráficas de f y g delimitan completamente el cuerpo cuyo volumen queremos calcular, por ejemplo, así puede plantearse el cálculo del volumen encerrado por la esfera unidad o el del cuerpo limitado por un elipsoide. En estos casos concretos, la región de integración será la proyección de ambas superficies en el plano xy. Finalmente, extendemos el anterior planteamiento al cálculo de volúmenes limitados por superficies “regulares” en general. Por poner un ejemplo; el volumen del cuerpo limitado por una superficie esférica y un cilindro. En este tipo de problemas suele ser de gran utilidad efectuar cambios de coordenadas, en el caso de dos variables, el cambio a coordenadas polares.

• *Cálculo de volúmenes mediante integrales triples.* El cálculo del volumen $V(C)$ de un cuerpo elemental C mediante una integral triple es obvio: será la integral de la función $f(x, y, z) = 1$ en C. Esta integral se puede evaluar, gracias al teorema de Fubini, mediante integrales simples iteradas. Calculamos así el volumen encerrado por la esfera unidad, y comparamos con los procesos para calcularlo mediante una integral doble o mediante una integral simple considerando C como un cuerpo de revolución (ejercicios que ya hemos hecho). Finalmente, evaluamos la integral $\int\int\int_C dxdydz$ usando coordenadas esféricas, observando así hasta qué punto puede llegar a simplificarse el cálculo de una integral cuando uno realiza un cambio de coordenadas adecuado. Hacemos más ejercicios.

4.3. Aplicaciones al cálculo de probabilidades. Integrales impropias. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) viene dada por una función $F_{(X,Y)} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ que se define $F_{(X,Y)}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ y se denomina función de distribución conjunta de X e Y o función de distribución de (X, Y). Se dice que (X, Y) es una variable aleatoria continua si existe una función f no negativa tal que

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int\int_R f(t, s)dtds,$$

donde R es el rectángulo no acotado $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$. Claro, pero nosotros no hemos definido integral sobre un rectángulo no acotado. Esto nos lleva a hacer algunas consideraciones sobre la definición adecuada de integral impropia. Nos conformaremos con dar sentido a nuestra integral, así, teniendo en cuenta que f es no negativa, consideraremos

$$\int\int_R f(t, s)dtds = \sup_{a<x, c<y} \int\int_{[a,x]\times[c,y]} f(t, s)tds$$

y la integral en todo el plano será

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(t, s)dtds = \sup_R \int\int_R f(t, s)dtds,$$

donde R recorre los rectángulos (acotados) del plano. Puesto que en la mayoría de los casos la función f es tal que permite reducir la integral doble sobre rectángulos a integrales iteradas, tendremos

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t)dsdt.$$

Obviamente, para que F sea realmente una función de distribución es necesario que f verifique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)dtds = 1.$$

A f se le denomina entonces función de densidad o densidad de la distribución de (X, Y). Ahora podemos calcular la probabilidad de un suceso $\{(X, Y) \in D\}$, con D una región elemental del plano, evaluando la integral

$$P[(X, Y) \in D] = \int\int_D f(t, s)dtds.$$

Las distribuciones *marginales* de X e Y se calculan de la forma

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx.$$

Una importante aplicación del teorema de cambio de variables al cálculo de probabilidades de variables aleatorias continuas bidimensionales es la siguiente: Supongamos que (X, Y) es una variable aleatoria continua y que queremos calcular la distribución de probabilidad de una nueva variable aleatoria U dada por una función de X e Y, a saber, $U = h(X, Y)$ (U por ejemplo puede ser $X + Y$, $X \cdot Y$, ...). Lo que hacemos es definir otra variable $V = g(X, Y)$, lo más sencilla posible, de modo que la transformación $T(x, y) = (h(x, y), g(x, y))$ sea una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ inyectiva, así que T tiene inversa y podemos poner X e Y en función de U y V, pongamos $X = s(U, V)$ e $Y = r(U, V)$. Supongamos ademas que r y s tienen derivadas parciales continuas. Sea ahora D una región elemental cualquiera del plano xy y $D' = T^{-1}(D)$. Puesto que T es inyectiva, es claro que los sucesos $\{(X, Y) \in D\}$ y $\{(U, V) \in D'\}$ son iguales, luego

$$P[(U, V) \in D'] = P[(X, Y) \in D].$$

Así, aplicando el teorema de cambio de variables obtenemos

$$P[(U,V)\in D'] = \int\int_{D'} f(s(u,v),r(u,v))J(u,v)dudv.$$

Como lo que hemos hecho es válido para cualquier región D elemental del plano, acabamos de obtener la distribución de probabilidad de (U,V). Luego para obtener la que queríamos, la de U, basta obtener ahora la densidad de probabilidad marginal de U.

Si lo que queremos es calcular una probabilidad concreta, pongamos $P[U\in D]$, con D un intervalo de $\mathbb{R}$, sin calcular la distribución de $U=g(X,Y)$, podemos simplemente evaluar la integral de f sobre la región del plano $S=\{g(X,Y)\in D\}$, siempre que ésta resulte ser una región sobre la que sabemos integrar f (una región elemental). Así,

$$P[g(X,Y)\in D] = \int\int_S f(x,y)dxdy.$$

Concluimos el capítulo con un ejemplo, relacionado también con el cálculo de probabilidades, de la utilidad que tienen las integrales iteradas impropias. Recordemos que en el capítulo dedicado al cálculo integral vimos la convergencia de la integral de Gauss $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ recurriendo a las funciones Γ y B de Euler. Veamos cómo haciendo uso de la integración iterada y del cambio a coordenadas polares obtenemos fácilmente el valor de I. Sea $C(r)$ el círculo de radio r,

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right) = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy =$$

$$\lim_{r\to 0}\int\int_{C(r)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho e^{-\rho^2}d\rho d\theta = 2\pi\int_0^{\infty}\rho e^{-\rho^2}d\rho = \pi.$$

5. Prácticas

Las prácticas de este capítulo consistirán esencialemente en hacer abundantes ejercicios de cálculo de integrales aplicando las técnicas vistas (reducción a integrales iteradas, cambio del orden de integración, cambio de variables) y de cálculo de volúmenes y áreas, ejercitándonos de este modo en el razonamiento mediante dibujos en el plano y en el espacio. Prestamos especial atención a la determinación de la región de integración y a los posibles criterios para decidir si un cambio de coordenadas sería adecuado o no, y cuál. Haremos también ejercicios de cálculo de probabilidades del tipo: dada la función de densidad de una variable aleatoria continua (X,Y), calcular su función de distribución, hallar las distribuciones de $X+Y$, $X\cdot Y$, $\text{máx}\{X,Y\}$, ..., calcular probabilidades como $P[a<X+Y\leq b]$ o $P[a\leq X\cdot Y]$. Incluso podemos calcular probabilidades condicionadas, introduciendo previamente lugar la fórmula de la densidad de distribución de una variable aleatoria condicionada (ésta definición no la tendrán disponible hasta la asignatura Estadística Matemática en el segundo curso).

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis matemático,* segunda edición. Editorial Reverte.
[2] T. M. Apostol, *Calculus*, Volumen 1 y Volumen 2, segunda edición. Editorial Reverte.
[3] R. G. Bartle and Donald R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, Third Edition. Ed. Wiley.
[4] Juan de Burgos, *Cálculo infinitesimal de una variable.* Ed. McGraw-Hill.
[5] B. Demimovich, *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, Ed. Paraninfo.
[6] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag.
[7] J.A. Fernández Viña, *Análisis matemático I. Cálculo infinitesimal.* Ed. Tecnos.
[8] J. A. Fernández Viña y E. Sánchez Mañes, *Ejercicios y complementos de Análisis matemático I.* Ed. Tecnos.
[9] F. Galindo Soto, J. Sanz Gil y L. A. Tristán Vega, *Guia Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real.* Ed. Thomson.
[10] J. E. Mardsen y A. J. Tromba, *Cálculo vectorial*, Tercera Edición. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
[11] N. Piskunov, *Cálculo diferencial e integral*, tomo I y tomo II. Ed. Mir Moscú.
[12] G. F. Simmons, Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill.
[13] M. Spivak, *Calculus. Calculo infinitesimal*, Segunda Edición. Editorial Reverte.